Polos Olímpicos de Treinamento
Curso de Álgebra - Nível 2
Prof. Marcelo Mendes

Aula 6

Indução - Parte I

O verbo induzir significa gerar. Nesta aula, começaremos a ver o assunto Indução Matemática (ou Indução Finita ou Princípio da Indução Finita), que é um método de prova envolvendo números inteiros que aproveita o trabalho feito na demonstração de casos anteriores para se provar o fato para um inteiro maior.

Como assim? Vejamos um exemplo.

1 Um Exemplo para Organizar as Ideias

Considere mais uma vez a sequência de Fibonacci definida por $F_1 = F_2 = 1$ e, para $n \geq 3$, $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$, ou seja, seus primeiros termos são $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...$

Vamos mostrar a seguinte identidade

$$F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Começamos verificando para valores pequenos de n:

i. $n = 1 : F_1 = F_3 - 1 \Leftrightarrow 1 = 2 - 1$

ii. $n = 2 : F_1 + F_2 = F_4 - 1 \Leftrightarrow 1 + 1 = 3 - 1$

iii. $n = 3 : F_1 + F_2 + F_3 = F_5 - 1 \Leftrightarrow 1 + 1 + 2 = 5 - 1$

Mas o que o método da indução procura fazer é realizar a prova a partir de casos anteriores. Vamos fazer isso com as identidades acima.

Começando com

$$F_1 = F_3 - 1,$$

somamos F_2 a cada membro da equação e obtemos

$$F_1 + F_2 = F_2 + F_3 - 1 = F_4 - 1.$$

Observe que primeiro obtemos o lado esquerdo desejado e, só depois, organizamos o lado direito. Prosseguindo, partimos de

$$F_1 + F_2 = F_4 - 1,$$

somamos F_3 a cada membro e chegamos a

$$F_1 + F_2 + F_3 = F_3 + F_4 - 1 = F_5 - 1,$$

ou seja, repetimos a mesma operação anterior. Isso pode ser feito de maneira geral, supondo que já tenhamos chegado a

$$F_1 + F_2 + ... + F_k = F_{k+2} - 1.$$

Em seguida, somamos F_{k+1} a cada membro da equação e concluímos que

$$F_1 + F_2 + ... + F_k + F_{k+1} = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1.$$

Portanto, não precisamos fazer as operações uma por uma. Podemos descrever um método que sirva para todas elas, desde que tenhamos um caso inicial para servir de 'ponta pé inicial'. Esse método é o que chamamos de *indução.*

Observe que esse processo nos permite, inclusive, supor os resultado para outros momentos distintos do passo imediatamente anterior. Quando isso é necessário, costuma-se chamar de *indução forte.*

Problema 1. Mostre que $2^n > n^2, \forall n > 4$.

Solução. Vejamos um caso inicial. Para $n = 5$, de fato, $2^5 > 5^2$. Se duplicamos ambos os lados, obtemos $2^6 > 2 \cdot 5^2 > 6^2$. Agora, vamos mostrar como essa passagem de um número para o seguinte é geral.

Suponha que seja verdade para $k > 4$, ou seja, $2^k > k^2$. Daí, duplicamos ambos os lados

$$2^{k+1} > 2k^2,$$

e ficará faltando apenas mostrar que

$$2k^2 \geq (k+1)^2$$

o que é equivalente a $(k-1)^2 \geq 2$, o que é certamente verdade.

Problema 2. Prove que $3^n \geq n^3$ para todo n inteiro positivo.

Problema 3. Prove a desigualdade de Bernoulli: para todo número real $x > -1$ e todo número natural n, ocorre

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Solução. Nesse problema, temos duas letras (x e n). Como indução é um método para números inteiros, a variação só poderá ser do valor de n.

No caso inicial, quando $n = 1$, temos $(1+x)^1 \geq 1 + x \cdot 1$, que é verdade.

Em seguida, suponha que a desigualdade seja verdadeira para $n = k$, isto é, $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Depois, multiplicamos cada lado por $1+x$ (que é positivo pois $x > -1$) e chegamos a

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x).$$

Agora, veja que $(1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$ pois $kx^2 \geq 0$. Portanto,

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

Problema 4. Se x e y são números reais quaisquer, então $|x+y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular). Usando esse fato, prove que se $x_1, x_2, ..., x_n$ são números reais quaisquer, então

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|.$$

Problema 5. Prove que uma soma arbitrária de $n \geq 8$ centavos pode ser paga com moedas de 3 e 5 centavos (tendo essas moedas em quantidade suficiente).

Solução. Como $8 = 3 + 5$, então a operação é possível para 8. Suponha que $m \geq 8$ centavos possam ser pagos. Então, será necessário provar que $m + 1$ centavos podem ser pagos dessa maneira.

Se a soma de m centavos foi paga com o uso de moedas de 5 centavos, então substitua uma moeda de 5 centavos por duas de 3 centavos e a quantia final será $m + 1$ centavos.

Caso contrário, a soma de m centavos foi paga somente com moedas de 3 centavos e, como $m \geq 8$, há ao menos três moedas de 3 centavos. Troque então três moedas de 3 centavos por duas de 5 centavos e novamente a quantia final de $m+1$ centavos desejada foi obtida.

Problema 6. Seja $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 1$, a sequência de Fibonacci. Prove que quaisquer dois termos consecutivos dessa sequência são sempre primos entre si, ou seja, $\text{mdc}(F_k, F_{k+1}) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$.

Problema 7. Seja $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$, a sequência de Fibonacci. Mostre que F_{3n} é par.

Problema 8. Seja $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$, a sequência de Fibonacci. Mostre que F_{5n} é múltiplo de 5.

Problema 9. Seja $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$, a sequência de Fibonacci. Mostre que $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Problema 10. A sequência (a_i) é definida por $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Encontre uma fórmula explícita para o n-ésimo termo dessa sequência.

Solução. Vamos calcular alguns termos iniciais na busca de algum padrão para a fórmula explícita, aquela que depende apenas de n e não mais de outros termos.

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3,$$
$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 7,$$
$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 15,$$
$$a_6 = 3a_5 - 2a_4 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 7 = 31.$$

O que os números $0, 1, 3, 7, 15, 31$ têm de especial? Uma olhadinha cuidadosa nos faz perceber que todos eles são potências de 2, menos 1. Mais especificamente

$$a_3 = 3 = 2^2 - 1,$$
$$a_4 = 7 = 2^3 - 1,$$
$$a_5 = 15 = 2^4 - 1,$$
$$a_6 = 31 = 2^5 - 1.$$

Portanto, nossa conjectura (sinônimo formal para 'chute') será que $a_n = 2^{n-1} - 1$. Somente agora (após a conjectura feita) aplicaremos a ideia de indução, que só conseguirá provar a fórmula caso ela seja verdadeira (caso fosse falsa, o processo de indução encontraria um obstáculo intranspassável em algum momento).

Os casos iniciais já estão escritos e validam a conjectura. Em seguida, vamos supor que tenhamos a fórmula válida para todo $n \leq k$ (*indução forte*). Em particular, estamos supondo para $k-1$ e k

$$a_{k-1} = 2^{k-2} - 1$$
$$a_k = 2^{k-1} - 1.$$

Daí,

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 3\left(2^{k-1} - 1\right) - 2\left(2^{k-2} - 1\right)$$
$$\Leftrightarrow a_{k+1} = 2^k - 1.$$

Problema 11. Sabe-se que $a + \frac{1}{a}$ é um inteiro. Prove que todos os números da forma $a^n + \frac{1}{a^n}$, $n = 2, 3, ...$, também são inteiros.

Problema 12. Sejam a e b números reais distintos. Demonstrar por indução a proposição

$$(a-b)|\left(a^n-b^n\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Problema 13. A sequência $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ de números é tal que $a_1 = 3, a_2 = 5$ e $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, para $n > 2$. Prove que $a_n = 2^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 14. Mostre, por indução, que $2 + 4 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 15. Considere a sequência definida recorrentemente por $a_{n+1} = 3a_n + 4, \forall n \in \mathbb{N}$. Supondo $a_0 = 0$:
a) Calcule a_1, a_2, a_3, a_4.
b) Conjecture uma fórmula para a_n e prove-a por indução.

Problema 16. Considere a sequência definida por $a_1 = 0, a_2 = 3, a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}, n \geq 3$. Determine a maior potência de 2 que divide $a_{2012} + 1$.

Problema 17. Considere a sequência $\{a_n\}$ definida por $a_n = 3^{2n} - 1, n \in \mathbb{N}$.

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, mostre que $a_{n+1} = a_n + 8 \cdot 3^{2n}$.
b) Demonstre, por indução sobre n, que a_n é divisível por 8, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 18. Sendo n um número inteiro positivo qualquer, demonstrar que a expressão $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ é divisível por 7.

Problema 19. Mostre que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n},$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 20. Prove que

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 + ... + 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1) - 1,$$

$\forall n \geq 2$ natural.

Problema 21. a) Verifique que a soma dos inversos de $2, 3$ e 6 é 1.
b) Prove que $\forall p$ natural, $p \geq 3$, existem p naturais 2 a 2 distintos $n_1, n_2, ..., n_p$ tais que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + ... + \frac{1}{n_p} = 1.$$

Problema 22. Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Dicas

2. Veja a solução da questão 1.

6. Suponha que dois números de Fibonacci consecutivos possuam um fator primo em comum e conclua que todos os números de Fibonacci teriam esse fator.

11. Use a identidade $a^n + \dfrac{1}{a^n} = \left(a^{n-1} + \dfrac{1}{a^{n-1}}\right)\left(a + \dfrac{1}{a}\right) - \left(a^{n-2} + \dfrac{1}{a^{n-2}}\right)$.

12. Use a identidade $(a^n - b^n) = \left(a^{n-1} - b^{n-1}\right)(a+b) - ab\left(a^{n-2} - b^{n-2}\right)$.

16. Resolva a equação de recorrência.

18. Use os fatos $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 9^{n+1} - 2^{n+1}$, $9 = 7 + 2$ e $(a+b)^k = Ma + b^k$, em que Ma representa 'um múltiplo de a'. Ou, então, chame $a_{n+1} = 9^{n+1} - 2^{n+1}$ e use que $a_{n+1} - 2a_n = 7 \cdot 9^n$, repetindo a ideia proposta no problema 17.

21. Para o item b, suponha que a igualdade seja verdadeira para k números, divida a equação por 2 e some $\dfrac{1}{2}$ a ambos os lados da nova identidade.

22. Observe que as diagonais de um polígono $A_1A_2...A_{n+1}$ são todas as diagonais de $A_1A_2...A_n$, além do lado A_1A_n e das diagonais que partem de A_{n+1}.

Respostas

15. a) $a_1 = 4, a_2 = 16, a_3 = 52, a_4 = 212$. b) Conjectura: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2$.

16. 4022.