POTI

POLOS OLÍMPICOS DE
TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

Nível 2

Recorrências

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo

Problemas

Problema 1. (São Petersburgo 2019) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma progressão aritmética não-constante para a qual existe um número natural n tal que

$$a_n + a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{3n-1}.$$

Mostre que não existem termos iguais a 0 nesta sequência.

Problema 2. (Espanha 2016) Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma progressão aritmética e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma progressão geométrica tais que:

$$a_1 = g_1 \neq 0, \qquad a_2 = g_2, \qquad a_{10} = g_3.$$

Prove que para cada inteiro positivo k existe um inteiro positivo l tal que $g_k = a_l$.

Problema 3. Considere a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$a_1 = 1, \quad a_n = 5a_{n-1} + 3^{n-1} \text{ para } n \geq 2.$$

Prove que p divide a_p sempre que p for um primo maior que 5.

Problema 4. (Moscou 52) Considere uma progressão geométrica não-nula cuja razão q é um inteiro diferente de 0 e -1. Mostre que a soma de dois ou mais termos desta sequência não pode ser igual a algum de seus termos.

Problema 5. Prove que toda progressão aritmética infinita cujos termos são todos números inteiros possui uma subsequência que é uma progressão geométrica.

Problema 6. (Pan-Africana 2019) Seja $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de números reais definida por:

$$\begin{aligned} &a_0 = 3,\ a_1 = 2 \text{ e } a_2 = 12; \\ &2a_{n+3} - a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n = 0. \end{aligned}$$

Mostre que a_n é sempre um inteiro positivo.

Problema 7. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dada por $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ para todo $n \geq 1$. Encontre o número inteiro mais próximo de

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{100}+1}.$$

Problema 8. Os números reais u_1, u_2, $\ldots$ satisfazem $u_1 = 1$ e, para $n > 1$,

$$u_n = \frac{1}{u_1 + \cdots + u_{n-1}}.$$

Mostre que existe inteiro positivo m tal que

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m > 2020.$$

Problema 9. (Coreia-Júnior 2007). A sequência $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ satisfaz $a_i \in \{2, 3\}$ para $i = 1, 2, \ldots, 2007$. Já a sequência de inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_{2007}$ satisfaz $a_i x_i + x_{i+2} \equiv 0 \mod 5$ para $i = 1, 2, \ldots, 2005$, e $a_{2006}x_{2006} + x_1 \equiv 0 \mod 5$ e $a_{2007}x_{2007} + x_2 \equiv 0 \mod 5$ (completando o ciclo). Mostre que os inteiros x_i, $i = 1, 2, \ldots, 2007$, são todos múltiplos de 5.

Problema 10. Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais satisfaz, para cada $n \geq 1$, a igualdade

$$\frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{a_{n+3} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}}.$$

Sabendo que $a_{11} = 4$, $a_{22} = 2$ e $a_{33} = 1$, mostre que, para todo natural k, a soma,

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_{100}^k$$

é um quadrado perfeito.

Problema 11. (Vojtěch Jarník 2019) Seja $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência tal que $a_0 = 1$ e, para todo $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}.$$

Mostre que:

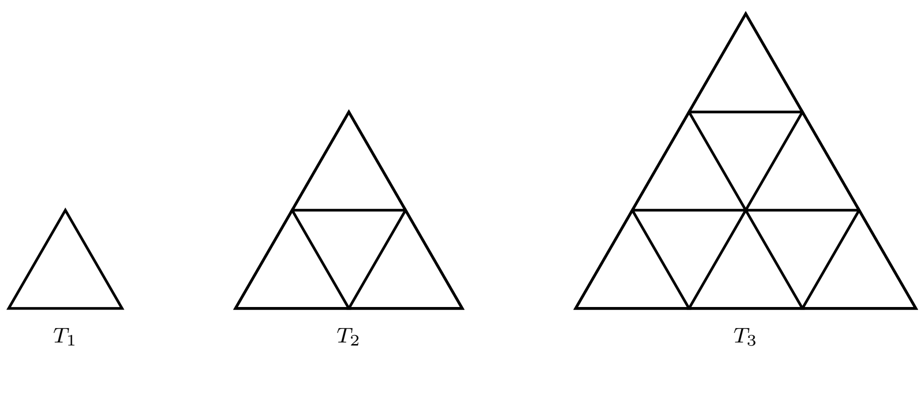
- Para todo natural n, a_n é um número inteiro.
- Para todo natural n, $a_n a_{n+1} - 1$ é um quadrado perfeito.

Problema 12. (Israel 2015 adaptado) Considere a sequência de Fibonacci F_n definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e a relação de recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todos inteiros $n \geq 2$. Seja $p \geq 3$ um número primo. Mostre que $F_{p-1} + F_{p+1} - 1$ é divisível por p.

Problema 13. (URSS 82) Cada membro, a partir do terceiro, das duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ é igual a soma dos dois que o antecedem. Os primeiros membros são: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 2$ e $b_2 = 1$. Quantos números naturais, talvez em lugares distintos, são encontrados em ambas sequências?

Problema 14. Esmeralda quer escrever todos os inteiros positivos de n dígitos que usam apenas os dígitos 1, 2 e 3 e que não tem nenhum par de 1's adjacentes (um do lado do outro). Quantos números ela pode escrever?

Problema 15. (Lusófona 2011 adaptado) Considere a sequência de triângulos equiláteros T_n ladrilhados representada abaixo:



T_1 T_2 T_3

Um sub-triângulo equilátero de um triângulo ladrilhado T_n qualquer é chamado de *Delta* quando ele contém um vértice em seu topo, ou seja, esta na configuração Δ. Por exemplo, T_3 possui 10 sub-triângulos do tipo *Delta*. Encontre o número de sub-triângulos do tipo *Delta* em T_{20}.

Problema 16. (AIME 1985) Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 metro. Uma joaninha começa a caminhar a partir do vértice A ao longo das arestas deste tetraedro obedecendo a seguinte regra: em cada um dos vértices ela escolhe, com igual probabilidade, uma das arestas que se encontram nele e a percorre até encontrar o vértice que jaz em seu outro extremo. Encontre a probabilidade da joaninha retornar a A após percorrer 7 metros.

Problema 17. Mostre que o m.d.c entre $2^n + 3^n$ e $2^{n+1} + 3^{n+1}$ é igual a 1 para todo n natural.

Problema 18. Dado um número real x denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro n tal que $n \leq x$. Para cada n natural, encontre o resto da divisão de

$$\lfloor (3 + \sqrt{8})^n \rfloor$$

por 6.

Problema 19. Prove que existe uma **única** função $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ tal que

$$f(f(x)) = 6x - f(x).$$

Problema 20. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que $a_1 = 4$ e, para todo n natural

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + \frac{a_n}{2}.$$

Determine a_n em função de n.

Soluções

1. Sendo $a_n = a + (n-1)d$, a igualdade equivale a $2a + (2n-1)d = (3n-1)a + \frac{(3n-1)(3n-2)}{2}d$. Segue que

$$-(3n-3)a = \frac{9n^2 - 13n + 4}{2}d \iff d = -\frac{2}{3n - \frac{4}{3}}a = \frac{6}{4-9n}a.$$

Então $a_{m+1} = 0$, $m \geq 0$, é equivalente a

$$a + m\frac{6}{4-9n}a = 0 \iff 6m = 9n - 4,$$

pois $a \neq 0$ (caso contrário, teríamos $d = 0$ e a progressão seria constante). Mas o lado esquerdo é múltiplo de 3 enquanto o direito não é, logo a_{m+1} nunca é zero.

2. Como $a_1 = g_1$, podemos escrever $a_n = a + (n-1)d$ e $g_n = ar^{n-1}$. Segue que $a + d = ar$ e $a + 9d = ar^2$, donde $d = a(r-1)$ e $9d = a(r^2-1)$.

Se $r = 1$, $g_k = a = a_1$ para todo inteiro positivo k.

Caso contrário, obtemos $9 = r + 1$, e daí $r = 8$ e $d = 7a$. Observe porém que $8^{k-1} \equiv 1^{k-1} \equiv 1 \mod 7$, logo existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $7(l-1) + 1 = 8^{k-1}$. Segue que

$$a_l = a + (l-1)d = a + 7(l-1)a = a(7(l-1)+1) = a8^{k-1} = g_k,$$

como queríamos demonstrar.

3. Escrevendo, para $j = 0, \ldots, n-2$,

$$5^j a_{n-j} = 5^{j+1}a_{n-j-1} + 5^j 3^{n-j-1}$$

e somando todos os termos, obtemos $a_n = 3^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-2} + \cdots + 5^{n-2} \cdot 3 + 5^{n-1}a_1$. Como $a_1 = 1$, do lado direito temos uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 3^{n-1} e a razão é $\frac{5}{3}$. A soma então é igual a $\dfrac{((\frac{5}{3})^n - 1)3^{n-1}}{\frac{5}{3} - 1} = \dfrac{5^n - 3^n}{2}$. Para demonstrar que p divide $a_p = \dfrac{5^p - 3^p}{2}$, note que pelo pequeno Teorema de Fermat $p | 5^p - 3^p = 2a_p$. Como p é primo com 2, $p | a_p$.

4. Suponha por contradição que seja possível. Sendo r a razão da P.G., existem $m + 1 \geq 3$ inteiros não-negativos [1] $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ tais que

$$c = r^{x_0} = r^{x_1} + r^{x_2} + \cdots + r^{x_m}.$$

Se $r > 1$, c admite duas representações na base r, absurdo. Se $r = 1$, teríamos $1 = m \geq 2$, absurdo. Por fim, se r é negativo, considere o caso x_0 ímpar. Separando os x_i, $i = 1, \ldots, m$, em valores pares e ímpares, obteríamos

$$|r|^{x_{i_1}} + \cdots |r|^{x_{i_l}} = |r|^{x_0} + |r|^{x_{p_1}} + \cdots |r|^{x_{p_{m-l}}},$$

onde x_{p_j} é par e x_{i_j} é ímpar. Novamente, pela unicidade da representação em base $|r|$, os índices pares não podem existir e $l = 1$, donde $1 = m \geq 2$, absurdo. O caso par é análogo.

[1] mesmo se considerássemos uma P.G $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ poderíamos fazer todos os x_i positivos mediante multiplicação por r^N, com N muito grande

5. Seja $b_n = a + (n-1)d$, $n \geq 0$, a progressão aritmética. Considere inicialmente a subsequência $c_n = b_{an+1} = a + (an)d = a(1+nd)$, $n \geq 0$, que é uma P.A. de primeiro termo a e razão ad. A P.G. determinada por c_0 e c_1 tem como termos

$$g_n = a(1+d)^n = a\left(1 + d \cdot p_n(d)\right) = c_{p_n(d)},$$

onde $p_n(d) = \frac{(1+d)^n - 1}{d}$ é um inteiro. Segue que g_n é uma subsequência da P.A. original b_n.

6. Fazendo casos pequenos somos levados a conjecturar que $a_n = 4a_{n-2}$, se $n \geq 2$. Provaremos por indução.

(i) Caso base: $n = 2$. Então $a_2 = 12 = 4 \cdot 3 = a_0$.

(ii) Passo indutivo: Se a hipótese é válida para n, da relação no enunciado temos, $2a_{n+1} = a_n + 8a_{n-1} - 4a_{n-2} = 8a_{n-1} \implies a_{n+1} = 4a_{n-1}$.

Segue, também por indução, que a_n é sempre inteiro.

7. Note que $x_{k+1} = x_k(x_k+1)$. Usaremos um truque bastante comum: $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)}$. Segue que $\dfrac{1}{x_{k+1}} + \dfrac{1}{x_k+1} = \dfrac{1}{x_k}$. Assim, somando-se $\dfrac{1}{x_{101}}$ à expressão, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{100}+1} + \frac{1}{x_{101}} = \\
&\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{99}+1} + \frac{1}{x_{100}} = \\
&\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{98}+1} + \frac{1}{x_{99}} = \\
&\quad\vdots \\
&\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad n \in \{1, 2, \ldots, 97\} \\
&\quad\vdots \\
&\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1} = 2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, não é difícil mostrar que $x_{101} > 2$, logo $\frac{1}{x_{101}} < \frac{1}{2}$ e o inteiro buscado é 2.

8. Suponha por absurdo que $u_1 + u_2 + \cdots + u_m \leq 2020$ para todo m inteiro. Segue que

$$u_{m+1} = \frac{1}{u_1 + u_2 + \cdots + u_m} \geq \frac{1}{2020}$$

para todo $m \geq 1$ ($u_1 = 1$). Daí,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{2020^2+1} \geq (2020^2+1)\left(\frac{1}{2020}\right) > 2020,$$

uma contradição.

9. Observe que $2^2 \equiv 3^2 \equiv -1 \mod 5$, logo $a_i^2 \equiv -1 \mod 5$ para qualquer escolha dos a_i. Tomando os índices módulo 2007 e elevando ao quadrado, temos que $x_i^2 \equiv -x_{i+2}^2 \mod 5$. Por indução, $x_{i+2n}^2 \equiv (-1)^n x_i^2 \mod 5$. Fazendo $n = 2007$ obtemos $x_i^2 \equiv -x_i^2 \mod 5$, pois $i + 2 \cdot 2007 \equiv i \mod 2007$ (lembre que estamos considerando os índices módulo 2007), donde obtemos $x_i^2 \equiv 0 \mod 5$ e segue que $x_i \equiv 0 \mod 5$ para todo $i = 1, 2, \ldots, 2007$.

10. Da igualdade obtemos:

$$(a_{n+3} - a_{n+2})(a_n + a_{n+1}) = (a_{n+3} + a_{n+2})(a_n - a_{n+1}) \iff a_{n+3}a_{n+1} = a_{n+2}a_n.$$

Colocando $n+1$ no lugar de n na relação acima obtemos $a_{n+4}a_{n+2} = a_{n+3}a_{n+1} = a_{n+2}a_n$, pela própria relação acima. Se $a_{n+2} = 0$ para algum n, segue ainda desta relação que seu sucessor ou antecessor também é zero. Sem perda de generalidade suponha que seja a_{n+1}. neste caso a relação

$$\frac{a_{n+4} - a_{n+3}}{a_{n+1} + a_{n+2}} = \frac{a_{n+4} + a_{n+3}}{a_{n+1} - a_{n+2}}$$

não faria sentido. Dessa forma $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 3$ e assim, como $a_n a_{n+2} \neq 0$ para todo $n \geq 1$, pois é constante, concluímos que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Segue que $a_{n+4} = a_n$ para todo $n \geq 1$, ou seja, a sequência tem período 4, e o valor de a_n depende apenas do resto de n dividido por 4. Observe que 11, 22 e 33 deixam restos distintos módulo 4. Assim, podemos calcular a_n para n múltiplo de 4 por

$$a_4 = \frac{a_1 a_3}{a_2} = \frac{a_{33}a_{11}}{a_{22}} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2.$$

A expressão buscada é então igual a

$$25(4^k + 2 \cdot 2^k + 1^k) = [5(2^k + 1)]^2$$

e é um quadrado perfeito como queríamos demonstrar.

11. Pela fórmula de Bhaskara, a_{n+1} é a maior das raízes de $x^2 - 7a_n x + a_n^2 - 9 = 0$, logo $a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + a_n^2 + 9 = 0$. Substituindo $n+1$ no lugar de n obtemos $a_{n+2}^2 - 7a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}^2 + 9 = 0$ e subtraindo as duas equações

$$(a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n) - 7a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 0 \iff (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} - 7a_{n+1} + a_n) = 0.$$

Note porém que a sequência é crescente, logo

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n.$$

Como $a_0 = 1$ e $a_1 = \frac{7+\sqrt{9}}{2} = 5$, segue por indução que a_n é sempre inteiro.

Por outro lado, pela relação inicial, temos

$$a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + a_n^2 + 9 = 0 \iff (a_{n+1} + a_n)^2 = 9(a_{n+1}a_n - 1) \iff a_{n+1}a_n - 1 = \left(\frac{a_{n+1} + a_n}{3}\right)^2.$$

Contudo $a_{n+1}a_n - 1$ é inteiro e $\frac{a_{n+1}+a_n}{3}$ é racional pela letra a) , consequentemente $\frac{a_{n+1}+a_n}{3}$ também tem que inteiro, completando a prova.

12. Observe que $G_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ satisfaz a mesma recorrência que a sequência de Fibonacci, porém $G_1 = 1$ e $G_2 = 3$. Logo $F_{p-1} + F_{p+1} - 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p - 1$. Segue que

$$p \mid \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p - 1 \iff p \mid (1+\sqrt{5})^p + (1-\sqrt{5})^p - 2^p.$$

Expandindo o Binômio de Newton, notamos que os termos irracionais, ou seja, aqueles do tipo $\pm\binom{p}{j}\sqrt{5}^j$ com j ímpar cancelam e aqueles que sobram, do tipo $\pm\binom{p}{j}\sqrt{5}^j$ com j par, são múltiplos de p, exceto quando $j = 0$. Resta demonstrar que $p \mid 2 - 2^p$, mas esta é uma consequência direta do pequeno Teorema de Fermat.

13. Note que $4 = b_4 < 5 = a_4 < 7 = b_5$. Afirmamos que $b_n < a_n < b_{n+1}$ para todo $n \geq 4$. Provaremos por indução forte. Já temos o caso base. Dividimos o passo indutivo em dois casos:

(i) $n = 5$: Basta verificar diretamente.

(ii) $n > 5$: Por hipótese, $b_{n-2} < a_{n-2} < b_{n-1}$ e $b_{n-1} < a_{n-1} < b_n$. Somando as duas expressões concluímos que $b_n < a_n < b_{n+1}$.

Como b_n é crescente, $a_n = b_m$ implica que $n \leq 3$ e $m \leq 3$. Por verificação, apenas 1, 2 e 3 estão em ambas sequências.

14. Seja A_n o conjunto de números de n dígitos que terminam com 1 e satisfazem o exigido e B_n o conjunto de números de n dígitos que terminam com 2 ou 3 e satisfazem o exigido. Seja $a_n = \#A_n$ e $b_n = \#B_n$, ou seja, o número de elementos desses conjuntos. Se k é um dos elementos de A_{n+1}, após apagarmos seu último dígito 1 obtemos um elemento de B_n. Em contrapartida, adicionando um dígito 1 à direita de um elemento de B_n obtemos um elemento de A_{n+1}. Observe que cada uma dessas operações é a inversa da outra. Logo $a_{n+1} = b_n$.

Por outro lado, se k é um dos elementos de A_n, não podemos adicionar um dígito 1 à sua direita. Adicionando um dígito 2 ou 3 obtemos dois elementos distintos de B_{n+1}. O mesmo pode ser dito se partirmos de $k \in B_n$. Note que essas construções cobrem cada elemento de B_{n+1} exatamente uma vez. Assim, $b_{n+1} = 2(a_n + b_n)$. Substituindo a relação anterior nesta, obtemos a recorrência:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n, \qquad \text{e} \qquad a_1 = 1,\ a_2 = 2 \text{ (fazendo casos pequenos).}$$

Segue que $a_n = \dfrac{(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ e

$$a_n + b_n = a_n + a_{n+1} = \frac{(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n}{2} + \frac{(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}.$$

15. Seja a_n o número de triângulos do tipo *Delta* em T_n. Observe que cada par de pontos marcados em uma linha horizontal determina exatamente um dos triângulos do tipo *Delta* e em contrapartida cada um destes triângulos determina tal par de pontos. Considerando o sub-triângulo de lado $n-1$ e que contém o vértice no topo de T_n, obtemos a seguinte recorrência

$$a_n = a_{n-1} + \binom{n+1}{2},$$

na qual este binomial vem dos pares de pontos na base de T_n. Por indução, demonstramos que $a_n = \dbinom{n+2}{3}$:

(i) Caso base: $n = 1$, temos $a_1 = 1 = \binom{3}{3}$, ok!

(ii) Passo indutivo: Por hipótese $a_{n-1} = \binom{n+1}{3}$, logo $a_n = \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$ pela regra de Stifel.

Segue que $a_{20} = \binom{22}{3} = 1540$. Logo existem 1540 desses triângulos.

16. Seja a_n a probabilidade da Joaninha estar em A após percorrer n metros. Temos $a_0 = 1$. Por outro lado, ela só estará em A após $n+1$ metros se estivesse em algum dos vértices B, C ou D após percorrer n metros. A chance de estar em um desses neste momento é $1 - a_n$. Além disso, a partir de cada um deles, exatamente uma das três arestas levá-la de volta a A. Dessa maneira,

$$a_{n+1} = \frac{1 - a_n}{3}.$$

Escrevendo
$$(-3)^{-j}a_{n+1-j} = \frac{(-3)^{-j} - (-3)^{-j}a_{n-j}}{3}$$
e somando sobre todas as equações para $j = 0, 1, \ldots, n$ obtemos
$$a_{n+1} = 3^{-1} - 3^{-2} + \cdots + (-(-3)^{-j}) + \cdots + (-(-3^{-n})) = 3^{-1}\frac{1-(-3)^{-(n)}}{1-(-3^{-1})} = \frac{1-(-3)^{-n}}{4}.$$
E segue que $a_7 = \frac{182}{729}$.

17. A sequência $x_n = 2^n + 3^n$ satisfaz $x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1}$ com $x_0 = 2$ e $x_1 = 5$. Suponha que $p|x_{n+1}$ e $p|x_n$, com $n \geq 1$. Então $p|6x_{n-1}$. Contudo, se $n \geq 1$, $2 \nmid 2^n + 3^n$ e $3 \nmid 2^n + 3^n$, logo $(p, 2) = (p, 3) = 1$. Segue então que $p \mid x_{n-1}$. Assim, por indução (para trás!), obtemos que p divide x_1 e p divide x_0, donde $p = 1$.

18. Seja $\alpha = 3 + \sqrt{8}$ e $\beta = 3 - \sqrt{8}$. Como $\alpha + \beta = 6$ e $ab = 1$, $\alpha^n + \beta^n$ satisfaz a recorrência $x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$ com condições iniciais $x_0 = 2$ e $x_1 = 6$. Então $x_{n+1} \equiv -x_{n-1} \mod 6$. Por indução, segue que x_n é múltiplo de 6 quando n é ímpar. Ainda por indução, podemos demonstrar que $x_n \equiv 2 \mod 6$ quando n é da forma $4k$ e $x_n \equiv -2 \equiv 4 \mod 6$ quando n é da forma $4k + 2$. Por fim, note que $0 < \beta^n < 1$ para todo natural $n \geq 1$, logo $\lfloor \alpha^n \rfloor = x_n - 1$. Segue que os restos são

- 1, quando $n = 4k$;
- 3, quando $n = 4k + 2$;
- 5, quando n é ímpar.

19. Seja f uma função que satisfaz tal equação e $x \in (0, \infty)$. Considere a sequência $x_n = f^n(x)$, onde f^n indica a função f aplicada n vezes. Pela equação funcional, segue que x_n satisfaz a recorrência $x_{n+2} = -x_{n+1} + 6x_n$ para todo $n \geq 0$ e além disso $x_0 = x$. Note porém que a solução geral desta recorrência é $x_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$.

Sabemos que $x_0 = x$, logo $\alpha + \beta = x$. Por outro lado, sabemos que x_n é sempre positivo, pois f tem contra-domínio $(0, \infty)$. Note que, se $\beta > 0$, então para n suficientemente grande e ímpar $-(-3)^n > \frac{\alpha}{\beta}2^n$, donde $x_n < 0$ uma contradição. Por outro lado, se $\beta < 0$, então para n suficientemente grande e par $(-3)^n > -\frac{\alpha}{\beta}2^n$, donde $x_n < 0$, nova contradição. Segue que β tem que ser 0 e $\alpha = x$ (!), donde $f(x) = 2x$ é a única solução.

20. Escreva $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$. A recorrência fica
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{4q_n^2 + p_n^2}{2p_nq_n}$$
e, para calcular a_n, podemos considerar $p_{n+1} = 4q_n^2 + p_n^2$ e $q_{n+1} = 2p_nq_n$ (as frações não precisam ser irredutíveis). Segue que
$$x_{n+1} = p_{n+1} + 2q_{n+1} = (p_n + 2q_n)^2 = x_n^2 \text{ e } y_{n+1} = p_{n+1} - 2q_{n+1} = (p_n - 2q_n)^2 = y_n^2.$$
Logo, $x_n = x_1^{2^{n-1}}$ e $y_n = y_1^{2^{n-1}}$. Mas $x_1 = p_1 + 2q_1 = 4 + 2 \cdot 1 = 6$ e $y_1 = p_1 - 2q_1 = 4 - 2 \cdot 1 = 2$, donde $x_n = 6^{2^{n-1}}$ e $y_n = 2^{2^{n-1}}$. Como $p_n = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ e $q_n = \dfrac{x_n - y_n}{4}$, vem que
$$a_n = \frac{2(6^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}})}{6^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-1}}} = \frac{2(3^{2^{n-1}} + 1)}{3^{2^{n-1}} - 1} = 2 + \frac{4}{3^{2^{n-1}} - 1}.$$

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo