POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO

# Problemas Resolvidos

*Nível* 2

## Geometria - Conceitos iniciais

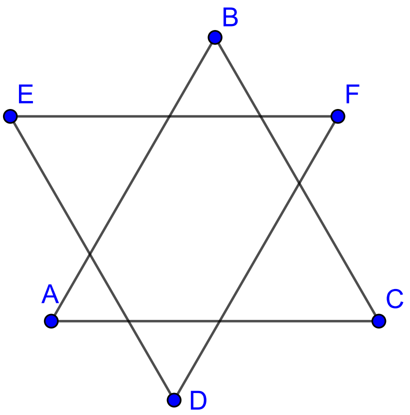
Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

# Problemas

**Problema 1.** Dados os pontos colineares e consecutivos $A, B, C, D$ e $E$ tal que $AB + CD = 3 \times BC$ e $DE = AB$. Sendo $M$ o ponto médio de $BE$, onde $MD = 2$ e $AE = 16$, calcule $MC$.

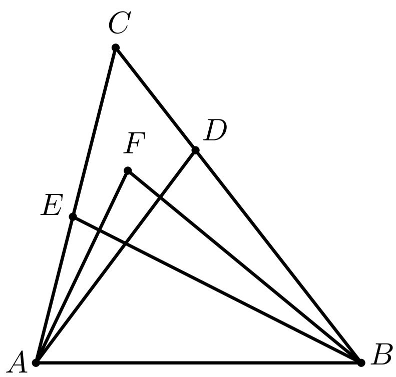
**Problema 2.** Em uma reta temos 4 pontos consecutivos $A, B, C$ e $D$ que satisfazem as seguintes relações $4 \times AB - BD - 2 \times CD = 4$, $AB = 3$ e $AC = 5$, calcule $AD$.

**Problema 3.** (OBM-2011) Dois triângulos equiláteros de perímetro $36cm$ cada um são sobrepostos de modo que sua interseção forme um hexágono com pares de lados paralelos, conforme ilustrado no desenho. Qual é o perímetro desse hexágono?




**Problema 4.** Um trapézio $ABCD$ de bases $BC$ e $AD$ com $BC < AD$ é tal que $2 \cdot AB = CD$ e $\angle BAD + \angle CDA = 120°$. Determine os ângulos do trapézio $ABCD$.

**Problema 5.** No $\triangle ABC$, $E$ e $D$ são pontos interiores aos lados $AC$ e $BC$, respectivamente. Se $AF$ bissecta $\angle CAD$ e $BF$ bissecta $\angle CBE$. Prove que $\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$.



**Problema 6.** No $\triangle ABC$, um ponto $D$ está sobre $AC$ tal que $AB = AD$. Se $\angle ABC - \angle ACB = 30°$, encontre $\angle CBD$.

**Problema 7.** A bissetriz interior de $B$ e a bissetriz exterior de $C$ do triângulo $ABC$ encontram-se em $D$. Através de $D$, uma reta paralela a $CB$ encontra $AC$ em $L$ e $AB$ em $M$. Se as medidas dos comprimentos de $LC$ e $MB$ do trapézio $CLMB$ são 5 e 7, respectivamente, encontre a medida de $LM$.

**Problema 8.** No $\triangle ABC$, $CF$ é a mediana relativa à hipotenusa $AB$, $CE$ é bissetriz de $\angle ACB$, e $CD$ é uma altura relativa a $AB$. Prove que $\angle DCE = \angle ECF$.

**Problema 9.** A medida do segmento de reta $PC$, perpendicular à hipotenusa $AC$ do triângulo retângulo $ABC$, é igual à medida do segmento $BC$. Mostre que $BP$ deve ser perpendicular ou paralelo à bissetriz de $A$.

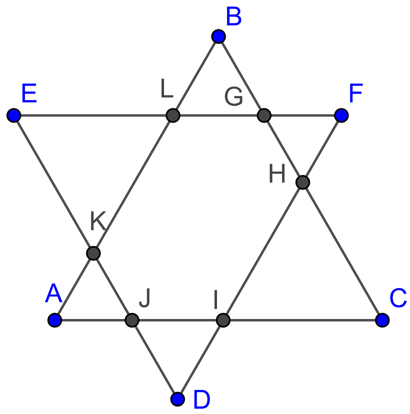
# Soluções

**1.** Suponha que $AB > BC$. Dizemos que $AB = DE = x + y$ e $BC = x$. Como $AB + CD = 3 \times BC$ temos que $CD = 2x - y$. Veja que $BE = BC + CD + DE = x + (2x - y) + (x + y) = 4x$, logo $BM = 2x$, $MD = x - y$ e $AE = 5x + y$. Como $MD = 2$ e $AE = 16$ temos que $x - y = 2$ e $5x + y = 16$. Somando ambas equações obtemos $6x = 18$, logo $MC = x = 3$.

O caso $AB < BC$ resolve de maneira análoga. O caso $AB = CD$ corresponde a $AB = BC = CM = MD = DE$ e da mesma forma concluímos que $MC = 3$.

**2.** Veja que $BC = AC - AB = 5 - 3 = 2$. Chamemos $CD = x$, então $BD = BC + CD + 2 + x$. Escrevemos $4 \times AB - BD - 2 \times CD = 4$ como $4 \times 3 - (2 + x) - 2x = 4$, donde temos $x = 2$. Logo $AD = AC + CD = 5 + 2 = 7$.

**3.** Como os dois triângulos são equiláteros com perímetro igual a $36cm$, o comprimento de seus lados é $12cm$. Queremos encontrar o perímetro do hexágono $GHIJKL$, conforme mostra a figura:




Como $AB \parallel DF$, $BC \parallel ED$ e $AC \parallel EF$, temos que os triângulos $\triangle BLG$, $\triangle FGH$ e $\triangle AJK$ são também equiláteros. Veja então que $LG + GH + HI = BG + GH + HC = BC = 12cm$ e que $IJ + JK + KL = DJ + JK + KE = DE = 12cm$, logo o perímetro do hexágono será igual a $12cm + 12cm = 24cm$.

**4.** Seja $E$ um ponto no segmento $AD$ tal que $AB \parallel CE$. Temos que $\angle CED = \angle BAD$ por serem correspondentes, logo teremos $\angle CED + \angle CDA = 120°$. Como a soma dos ângulo internos de um triângulo é igual a $180°$, temos que $\angle ECD = 60°$.

Por outro lado, veja que o quadrilátero $ABCE$ tem os lados opostos paralelos, logo ele é um paralelogramo, segue disso que $AB = CE$, logo temos que $2 \cdot CE = CD$. Considere o ponto médio $M$ do segmento $CD$, então $CE = CM$ e o triângulo $\triangle CEM$ é isósceles, como $\angle ECM = 60°$ temos que os outros ângulos internos do triângulo $\triangle CEM$ são iguais a $60°$ e, portanto, o triângulo é equilátero. Como consequência teremos $EM = MD$, logo $\triangle EMD$ é isósceles. Também temos $\angle EMD = 180° - \angle EMC = 120°$, logo $\angle MED = \angle MDE = 30°$. Com isso achamos um dos ângulos do trapézio: $\angle CDA = 30°$.

No triângulo $\triangle CED$ temos $\angle ECD = 60°$ e $\angle CDE = 30°$, segue então que $\angle CED = 90°$ e, como $AB \parallel EC$, temos também que $\angle BAD = 90°$. Os ângulos $\angle BAD$ e $\angle ABC$ são colaterais internos, logo $\angle ABC = 180° - \angle BAD = 90°$. Por último, $\angle BCD = 360° - 30° - 90° - 90° = 120°$.

**5.** Como $AF$ é bissetriz de $\angle CAD$ e $BF$ é bissetriz de $\angle CBE$, chamamos $x = \angle CAF = \angle FAD$ e $y = \angle CBF = \angle FBE$. Também chamamos $a = \angle DAB$ e $b = \angle EBA$. Olhando para os ângulos internos dos triângulos $\triangle EAB$ e $\triangle DAB$, temos $\angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA = 180° - 2x - a - b$ e $\angle ADB = 180° - \angle DBA - \angle DAB = 180° - 2y - a - b$. Logo $\angle AEB + \angle ADB = 360° - 2x - 2y - 2a - 2b = 2(180° - x - y - a - b)$. Finalmente, olhando para o triângulo $\triangle AFB$ temos que $\angle AFB = 180° - \angle FAB - \angle FBA = 180° - x - a - y - b$, o que conclui a prova.

**6.** Vamos chamar de $\alpha$ o ângulo $\angle ACB$, então $\angle ABC = \alpha + 30°$. Queremos encontrar o ângulo $x = \angle CBD$. Veja que $\angle ADB$ é externo ao triângulo $\triangle DCB$, logo $\angle ADB = \angle DCB + \angle CBD = \alpha + x$. Veja também que $\angle ABD = \angle ABC - \angle CDB = \alpha + 30° - x$. Como $AB = AD$, o triângulo $ABD$ é isósceles e $\angle ADB = \angle ABD$, logo $\alpha + x = \alpha + 30° - x$. Concluímos que $x = 15°$.

**7.** $\angle CBD = \angle BDM$, por serem ângulos alternos internos. Como $BD$ é bissetriz de $\angle ABC$, temos que $\angle MBD = \angle BDM$, logo $\triangle BMD$ é isósceles e $MD = MB = 7$.

Seja $E$ um ponto qualquer na reta $BC$ tal que $C$ se encontre entre $B$ e $E$. Veja que $\angle ECD = \angle CDM$, por serem ângulos alternos internos. Como $CD$ é bissetriz de $ACE$, temos que $\angle DCL = \angle LDC$, logo $\triangle CDL$ também é isósceles e $LD = LC = 5$.

Finalmente, $ML = MD - LD = 7 - 5 = 2$.

**8.** Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ são retângulos e tem em comum também o ângulo agudo $\angle BAC$, logo o outro ângulo agudo de ambos triângulos também tem que ter a mesma medida, isto é: $\angle ACD = \angle ABC$. Como o triângulo $ABC$ é retângulo, temos que a mediana relativa a hipotenusa é igual à metade da hipotenusa, ou seja, $AF = FB = CF$. Temos então que $\triangle BCF$ é isósceles e $\angle FBC = \angle FCB$. Isso mostra que $\angle ACD = \angle FCB$, como $AE$ é bissetriz de $\angle ACB$, concluímos que $\angle DCE = \angle ECF$, como queríamos mostrar.

**9.** Pelo ponto $C$, traçamos uma perpendicular a $AC$. Nessa perpendicular consideramos os pontos $P$ e $P'$ tais que $BC = CP = CP'$ e o ponto $B$ está mais próximo de $P$ do que de $P'$. Vamos mostrar que a bissetriz do ângulo $BAC$ é paralela a $BP$ e perpendicular a $BP'$.

Observe que o triângulo $BPP'$ tem a mediana, $BC$, igual à metade do lado $PP'$, logo o ângulo $\angle PBP'$ deve ser reto. Para ver isso, usando que $\triangle BCP$ e $\triangle BCP'$ são isósceles, dizemos que $\alpha = \angle CBP = \angle CPB$ e $\beta = \angle CP'B = \angle CBP'$, logo a soma dos ângulos internos de $\triangle BPP'$ é $180° = 2\alpha + 2\beta$, donde $\angle PBP' = \alpha + \beta = 90°$.

Agora é suficiente mostrar que a bissetriz de $A$ é perpendicular a $BP'$. Como os ângulos $\angle ABC$ e $\angle PBP'$ são ambos retos, temos que $\angle ABP' = 90° - P'BC = \angle CBP = \alpha$.

Denotemos por $D$ o ponto de interseção de $AC$ com $BP'$. Os triângulos $\triangle BPP'$ e $\triangle CDP'$ são ambos retângulos (pois $\angle PBP' = \angle DCP' = 90°$) e têm o ângulo agudo $\angle BP'P$ em comum, logo o outro ângulo agudo de ambos triângulos também tem que ter a mesma medida, isto é: $\angle CDP' = \angle BPP' = \alpha$. Veja também que $\angle CDP'$ e $\angle ADB$ são opostos pelo vértice, logo são iguais. Segue que $\angle ADB = \alpha$. Já tínhamos mostrado que $\angle ABD = \alpha$, então concluímos que $\triangle ABD$ é isósceles e, portanto, a bissetriz do ângulo $\angle BAD$ coincide com a altura relativa ao segmento oposto $BD$. Isso conclui a prova.

---

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández