POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

Nível 2

Paridade

Material elaborado por Valentino Amadeus Sichinel

Problemas

Problema 1. É possível que, em um tabuleiro de xadrez 8x8, um cavalo se desloque do canto inferior esquerdo ao canto superior direito passando por cada casa exatamente uma vez?

Problema 2. Um destacamento do exército conta com 100 soldados. Em cada noite, três soldados ficam de guarda. É possível que, após uma certa quantidade de tempo, cada soldado tenha partilhado a guarda com cada um dos outros soldados exatamente uma vez?

Problema 3. Dados dois pontos distintos A e B no plano, escolhemos 101 pontos na reta determinada por eles, todos fora do segmento AB. Mostre que a soma das distâncias desses 101 pontos ao ponto A não pode ser igual à soma das distâncias desses 101 pontos ao ponto B.

Problema 4. Quatro números 1's e cinco números 0's estão posicionados ao redor de um círculo. Entre cada par de números vizinhos, é escrito um 0 se os números são iguais e um 1 se os números são diferentes. Depois disso, os números "antigos" são apagados. É possível que, após realizar essa operação sucessivas vezes, os números remanescentes sejam todos iguais?

Problema 5. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais, cada um dos quais igual a 1 ou a -1. Mostre que, se

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0,$$

então n é divisível por 4.

Problema 6 (RMO[1])**.** Encontre todos os inteiros k para os quais todas as raízes do polinômio

$$f(x) = x^3 - (k-3)x^2 - 11x + (4k-8)$$

são inteiras.

[1] *Regional Mathematical Olympiad*, uma das fases da olimpíada nacional da Índia.

Soluções

1. Não. Observe que, toda vez que se movimenta, o cavalo passa a ocupar uma casa de cor oposta à cor da casa que ocupava até então. De fato, cada movimento do cavalo pode ser visto como uma combinação de três passos sucessivos, sendo um "passo"a passagem para uma casa vizinha (duas casas são vizinhas se têm um lado em comum), e casas vizinhas sempre têm cores opostas.

Dessa forma, se o cavalo inicia, digamos, em uma casa de cor preta, e passa por todas as casas do tabuleiro, exatamente uma vez por cada uma delas, ele há de finalizar a movimentação em uma casa de cor branca. Com efeito, há $8 \times 8 = 64$ casas no tabuleiro, o que faz com que um deslocamento de tal natureza seja composto por exatamente 63 movimentos e, ao executar uma quantidade ímpar de movimentos, o cavalo finaliza em uma casa de cor oposta à cor da casa em que começou, já que a cor da casa que ele ocupa muda a cada movimento.

No entanto, independentemente de como está posicionado o tabuleiro, a casa do canto inferior esquerdo e a casa do canto superior direito têm a mesma cor. Portanto, é impossível, que o cavalo se desloque do canto inferior esquerdo ao canto superior direito passando por cada casa exatamente uma vez.

2. Não. Cada vez que fica de guarda, um soldado partilha a guarda com outros dois colegas. Assim, a quantidade de colegas com os quais um determinado soldado já partilhou a guarda é sempre par (contando repetições, claro). Para que todos os soldados tenham partilhado a guarda com cada um dos outros soldados exatamente uma vez, cada soldado teria que ter compartilhado a guarda com exatamente outros 99 soldados, mesmo contando repetições. Isso jamais acontecerá, pois 99 não é par.

3. Denotemos por $d(X, Y)$ a distância entre dois pontos X e Y do plano.

Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_{101}$ os pontos escolhidos.

Se um desses pontos, digamos P_i, está mais próximo de A que de B, então

$$d(P_i, B) = d(P_i, A) + d(A, B).$$

Por outro lado, se P_i está mais próximo de B que de A, então

$$d(P_i, B) = d(P_i, A) - d(A, B).$$

Dessa forma, temos, para cada i,

$$d(P_i, B) = d(P_i, A) + f(i)d(A, B),$$

onde

$$f(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } P_i \text{ está mais próximo de } A \text{ que de } B \\ -1, & \text{se } P_i \text{ está mais próximo de } B \text{ que de } A \end{cases}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{101} d(P_i, B) = \sum_{i=1}^{101} d(P_i, A) + \sum_{i=1}^{101} f(i)d(A, B).$$

Assim, se a soma das distâncias dos pontos P_i ao ponto A fosse igual à soma das distâncias desses pontos ao ponto B, teríamos

$$\sum_{i=1}^{101} f(i)d(A, B) = 0,$$

isto é, teríamos

$$\sum_{i=1}^{101} f(i) = 0.$$

No entanto, $\sum_{i=1}^{101} f(i)$ é um somatório de 1's e de -1's, em que a quantidade total de parcelas é igual a 101. Como cada uma das parcelas é ímpar, e a quantidade de parcelas também, o valor do somatório é ímpar e, portanto, diferente de 0.

Dessa forma, não é possível que a soma das distâncias dos 101 pontos escolhidos ao ponto A seja igual à soma das distâncias dos mesmos 101 pontos ao ponto B.

4. Não. Suponhamos que, após sucessivas execuções da operação, obtemos um conjunto homogêneo de números, isto é, formado apenas por 0's ou apenas por 1's. Se em algum momento os números são todos 0's, no momento anterior os vizinhos eram todos iguais e, portanto, o conjunto já era homogêneo (isto é, os números já eram todos iguais). Assim, quando atingimos um estado homogêneo (isto é, um estado em que os números são todos iguais) *pela primeira vez*, os números são todos iguais a 1.

No entanto, para que os números sejam todos iguais a 1 em um determinado momento, os vizinhos deveriam ser todos distintos no momento anterior. Isso não é possível, já que a quantidade de números escritos ao redor do círculo é sempre ímpar (sempre igual a 9).

De fato, se enumerarmos as posições dos números de 1 a 9 no sentido horário, observamos que, para que os vizinhos sejam sempre distintos, os números das posições ímpares devem ser sempre distintos dos números das posições pares. Consequentemente, os números das posições ímpares serão iguais entre si (assim como os números das posições pares). Mas os números das posições 1 e 9 são vizinhos; não podem ser iguais. Absurdo! Dessa forma, não é possível que números vizinhos sejam todos distintos.

Portanto, independentemente de como estiverem posicionados os primeiros quatro números 1's e cinco números 0's, não é possível que, após algumas aplicações da operação descrita no enunciado, os números escritos ao redor do círculo sejam todos iguais.

5. Como cada a_i é igual a 1 ou a -1, cada uma das parcelas da soma

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3$$

também é igual a 1 ou a -1.

Sejam a a quantidade de parcelas iguais a 1 e b a quantidade de parcelas iguais a -1. Por um lado, $a + b = n$, pois temos ao todo n parcelas. Por outro lado, $a - b = 0$ - é o que indica a igualdade do enunciado. Assim, $a = b$, e temos $n = 2b$.

Contemos, agora, a quantidade de -1's que aparecem em

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3. \tag{1}$$

Veja bem: não estamos olhando para a quantidade de parcelas iguais a -1 (que sabemos ser igual a b), mas para a quantidade de fatores -1 dentro dessas parcelas. Assim, por exemplo, se $a_1 = -1$, a_1 contribui com 4 fatores, já que a_1 aparece em 4 parcelas.

Por um lado, cada a_i que é igual a -1 contribui com 4 fatores, pois aparece em 4 parcelas. Assim, a quantidade total de -1's que aparecem em (1) é divisível por 4 e, em particular, par.

Por outro lado, se p_0, p_1, p_2, p_3 e p_4 são as quantidades de parcelas com 0, 1, 2, 3 e 4 fatores -1, respectivamente, então a quantidade total de fatores -1 é igual a

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4.$$

Logo, $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4$ deve ser par. Como $2p_2 + 2p_3 + 4p_4$ sempre é par,

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 - (2p_2 + 2p_3 + 4p_4) = p_1 + p_3$$

também deve ser par.

Observe, no entanto, que $p_1 + p_3 = b$. Com efeito, as parcelas cujo valor é -1 são exatamente as parcelas que possuem uma quantidade ímpar de fatores -1.

Logo, b é par. Dessa forma, existe um inteiro k para o qual $b = 2k$.

Como $n = 2b$, segue daí que $n = 4k$. Portanto, n é divisível por 4.

6. Suponhamos que k é inteiro e tal que todas as raízes do polinômio f, definido no enunciado, são inteiras.

Sejam a, b e c as raízes de f.

Pelas relações de Girard, $abc = 8 - 4k$, que é par. Assim, ao menos uma das raízes é par. Por outro lado, também pelas relações de Girard, $ab + bc + ca = -11$, que é ímpar. Dessa forma, no máximo uma das raízes é par - se duas fossem par, $ab + bc + ca$ seria par também. Logo, exatamente uma das raízes a, b e c é par. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a é par.

Observe que

$$f(2) = 2^3 - (k-3)2^2 - 11 \cdot 2 + (4k - 8) = -10.$$

Como a, b e c são as raízes de f, e f é mônico (isto é, o coeficiente líder de f é 1), temos que

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

para todo x. Em particular,

$$-10 = f(2) = (2 - a)(2 - b)(2 - c).$$

Como a é par, $(2 - a)$ também é par. Pela igualdade acima, $(2 - a)$ é divisor de -10. Como os únicos divisores pares de -10 são 2 e -2, temos ou $2 - a = 2$, ou $2 - a = -2$. No primeiro caso, $a = 0$; no segundo, $a = 4$. Analisemos cada caso separadamente.

Caso I: $a = 0$.

Neste caso, temos $abc = 0$. Mas, pelas equações de Girard, $abc = 8 - 4k$. Assim, $k = 2$.

As demais equações de Girard se reduzem a

$$bc = -11 \quad \text{e} \quad b + c = k - 3 = -1.$$

A segunda nos dá $b = -1 - c$. Substituindo na primeira, ficamos com

$$(-1 - c)c = -11 \;\Rightarrow\; c^2 + c - 11 = 0,$$

que não tem solução inteira. Absurdo! Dessa forma, não é possível que tenhamos $a = 0$.

Caso II: $a = 4$.

Neste caso, devemos ter $f(4) = 0$ (com efeito, a é uma raiz de f), isto é,

$$4^3 - (k-3)4^2 - 11 \cdot 4 + (4k - 8) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 60 - 12k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 5.$$

Aplicando as equações de Girard (e utilizando os já conhecidos valores de a e de k), encontramos que os valores de b e de c hão de ser, em alguma ordem, 1 e -3. Todos inteiros.

Como as equações de Girard estão satisfeitas, concluímos que, quando $k = 5$, as raízes de f são, de fato, 0, 1 e -3.

Portanto, $k = 5$ é o único valor de k para o qual todas as raízes de f são inteiras.

Material elaborado por Valentino Amadeus Sichinel