Problemas Resolvidos

Nível 2

Sequências

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo

Problemas

Problema 1. (OBM 2007) Em 1949 o matemático indiano D. R. Kaprekar inventou um processo conhecido como *Operação de Kaprekar*. Primeiramente escolha um número de quatro dígitos (não todos iguais), em seguida escreva a diferença entre o maior e o menor número que podem ser formados a partir de uma permutação dos dígitos do número inicial. Repetindo o processo com cada número assim obtido, obtemos uma sequência.

Por exemplo, se o primeiro número for 2007, o segundo será $7200 - 0027 = 7173$. O terceiro será $7731 - 1377 = 6354$.

Começando com o número 1998, qual será o 2007-ésimo termo da sequência?

Problema 2. Seja $a_0 = 0$. Para $n \geq 0$, defina a_{n+1} recursivamente por $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$. Encontre uma fórmula fechada para a_n.

Problema 3. Seja $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, e $a_2 = 8$, e para $n > 2$ defina a_n recursivamente como o resto da divisão de $4(a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3})$ por 11. Calcule $a_{2018} \cdot a_{2020} \cdot a_{2022}$.

Problema 4. Calcule:

$$\frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{997^2} + \frac{1}{999^2} - \frac{1}{1002^2} - \frac{1}{1004^2} - \frac{1}{1006^2} - \cdots - \frac{1}{1998^2} - \frac{1}{2000^2}}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{999^2} + \frac{1}{1000^2}}.$$

Problema 5. (Albânia 2011) A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida por $a_1 = 1$ e $a_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$ $\forall n > 1$. Prove que:

a) Se n é par, $n!$ divide a_n.

b) Se n é ímpar e maior que 1, $n!$ não divide a_n.

Problema 6. (Helênica Júnior 2005 adaptado) Seja $f(n) = \dfrac{2n + 1 + \sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ para cada inteiro positivo n. Calcule:

a) $f(1)$ e $f(1) + f(2)$.

b) a soma $A = f(1) + f(2) + \cdots + f(400)$.

Problema 7. (OBM 2013)

Na tabela ao lado, a partir da segunda linha, o número escrito na coluna X é igual ao produto dos números da linha anterior e o número escrito na coluna Y é igual ao quociente da divisão do número escrito na coluna X da linha anterior pelo número escrito na coluna Y da linha anterior.

	X	Y
1ª	2	1
2ª	2	2
3ª	4	1
...	...	...

a) Qual o número que aparece na décima linha?

b) Qual a soma dos números que aparecem na linha 21?

Problema 8. Sejam a e b inteiros positivos. Arnaldo escreve sucessivamente números reais em um quadro negro x_1, x_2, x_3, ... usando a seguinte regra

$$x_1 = a,\ x_2 = b \text{ e } x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Ele para de escrever quando escreve o número zero. Quantos números x_k, não necessariamente distintos, Arnaldo escreveu?

Problema 9. Um grupo de $n \geq 3$ amigos está sentado em uma mesa circular em um restaurante. Sabemos que a quantidade de dinheiro que cada um deles possui é igual a média aritmética das quantidades de dinheiro que seus dois vizinhos possuem. Mostre que todos tem a mesma quantidade de dinheiro.

Problema 10. (Grécia 2013) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais com $a_1 = 2$ e $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})$ $\forall n \geq 2$. Encontre o termo a_{2013}.

Problema 11. Mostre que não existe uma sequência infinita de números reais x_1, x_2, ... tais que, para todo $n \geq 1$,

$$x_{n+2} = \sqrt{\frac{1}{2}x_{n+1} - x_n}\,.$$

Problema 12. Calcule:

$$\sum_{k=1}^{2020} \frac{k+2}{k \cdot (k+1) \cdot 2^k}, \text{ ou seja, } \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 2^2} + \cdots + \frac{2022}{2020 \cdot 2021 \cdot 2^{2020}}.$$

Problema 13. (Croácia 2005 adaptado) A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida por $a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} + 1$ para $n \geq 2$ e $a_1 = 1$. Mostre que, para todo m inteiro positivo,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < 2.$$

Problema 14. Calcule

$$\prod_{n=1}^{2020} \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

Problema 15. (OMERJ 2018) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números inteiros com $a_1 = 1$ e, para todo $n \geq 1$,

$$\begin{cases} a_{2n} &= a_n + 1 \\ a_{2n+1} &= 10a_n. \end{cases}$$

Quantas vezes o número 111 aparece nesta sequência?

Problema 16. (Japão 1994) Para cada inteiro positivo n, seja a_n o inteiro mais próximo de $\sqrt{n}$, e seja $b_n = n + a_n$. Determine a sequência crescente (c_n) de inteiros positivos que não aparecem na sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problema 17. (Rússia 2000) Arnaldo escreve em um quadro-negro a sequência $a_1 = 1$, a_2, a_3, $\ldots$ respeitando a seguinte regra: se $a_n - 2$ é um inteiro positivo que ainda não apareceu como a_1, a_2, a_3, $\ldots$, ou a_n, então ele escreve $a_{n+1} = a_n - 2$; caso contrário, escreve $a_{n+1} = a_n + 3$. Prove que todo quadrado perfeito não-nulo aparece na sequência como seu antecessor somado de 3.

Problema 18. Calcule:

$$\sum_{i=1}^{2020} \frac{i}{2^i}, \text{ ou seja, } \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2020}{2^{2020}}.$$

Problema 19. Seja a_1, a_2, $\ldots$, a_n uma sequência. Calcule

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}.$$

Problema 20. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência definida recursivamente por $a_1 = 1$ e $a_n = n(a_{n-1} + 1)$ para $n \geq 2$. Defina

$$P_n = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Encontre $\dfrac{P_n}{a_{n+1}}$.

Problema 21. (São Petersburgo 2009) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência infinita de números reais tais que

$$x_{n+2} = |x_{n+1}| - x_n.$$

Prove que ela é periódica.

Problema 22. Calcule:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2020^2}\right).$$

Problema 23. Calcule a soma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4 + 1}.$$

Problema 24. (Irã 2013 adaptado) Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de inteiros positivos tal que

$$a_{n+2} = \left\lfloor \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right\rfloor.$$

Prove que existe um inteiro positivo m tal que $a_m = 4$ ou $a_m = 3$.

OBS: $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x.

Problema 25. (Centro-americana 2016) Dizemos que um número racional é *irie* quando ele pode ser escrito na forma $1 + \frac{1}{k}$ para algum inteiro positivo k. Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito como o produto de r números *irie* distintos para cada inteiro $r \geq n - 1$.

Problema 26. (Norte da China 2019-parcial) Para cada inteiro positivo n, defina $f(n)$ como o menor inteiro positivo que não divide n. Considere a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = a_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_n = a_{f(n)} + 1 \; \forall n \geq 3.$$

Por exemplo, $a_3 = a_2 + 1 = 2$, $a_4 = a_3 + 1 = 3$.

Prove que existe um inteiro positivo C tal que $a_m \leq C$ para todo inteiro positivo m.

Problema 27. (Itália 2011) Uma sequência de inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é chamada de *escada de comprimento* n quando ela consiste de n inteiros consecutivos em ordem crescente.

a) Prove que para cada inteiro positivo n existem duas escadas de comprimento n sem elementos em comum, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tais que, para todo $i = 1, \ldots, n$, o maior divisor comum entre a_i e b_i é igual a 1.

b) Prove que para cada inteiro positivo n existem duas escadas de comprimento n sem elementos em comum, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tais que, para todo $i = 1, \ldots, n$, o maior divisor comum entre a_i e b_i é maior que 1.

Problema 28. Considere os números

$$A = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{595}{598} \cdot \frac{597}{600}$$
$$B = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{596}{599} \cdot \frac{598}{601}.$$

Prove que:

a) $A < B$,

b) $A < \frac{1}{5990}$.

Problema 29. (Norte da China 2019) Seja n um número inteiro positivo dado e $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ números reais tais que $a_{n+1} = a_1$ e $a_{n+2} = a_2$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ vale que

$$a_i \neq -1 \qquad \text{e} \qquad a_{i+2} = \frac{a_i^2 + a_i}{a_{i+1} + 1}.$$

Prove que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Problema 30. (Rússia 2008) As sequências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são definidas por $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ e

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}.$$

Mostre que $a_{2008} < 5$.

Problema 31. Os números da sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ são todos reais positivos e tais que, para todo $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k^2 + a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2} = a_{n+1}.$$

Se $a_8 = 2$, qual o valor de a_{16}?

Soluções

1. A sequência é $1998 \to 9981 - 1899 = 8082 \to 8820 - 0288 = 8532 \to 8532 - 2358 = 6174 \to 7641 - 1467 = 6174$. Note que, depois de 6174, todos os termos serão iguais a 6174, pois este é um ponto fixo da operação. Logo a resposta é 6174. Na verdade, começando com qualquer número de 4 dígitos, obtemos este número, 6174, após executarmos um número finito de vezes a operação de Kaprekar.

2. Segue que $\dfrac{a_{n+1}}{2^n} = \dfrac{a_n}{2^{n-1}} + 1 \implies \dfrac{a_{n+1}}{2^n} - \dfrac{a_n}{2^{n-1}} = 1$. Somando todas as relações vem que

$$\left(\frac{a_{n+1}}{2^n} - \cancel{\frac{a_n}{2^{n-1}}}\right) + \left(\cancel{\frac{a_n}{2^{n-1}}} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right) + \cdots + \left(\frac{a_1}{2^0} - \frac{a_0}{2^{-1}}\right) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n+1,$$

donde $\dfrac{a_{n+1}}{2^n} - \dfrac{a_0}{2^{-1}} = \dfrac{a_{n+1}}{2^n} = n+1$. Segue que $a_{n+1} = (n+1)\cdot 2^n$ e $a_n = n \cdot 2^{n-1}$.

3. Calculando os primeiros termos da sequência obtemos $a_3 = 5$, $a_4 = 6$, $a_5 = 10$, $a_6 = 7$, $a_7 = 4$, $a_8 = 7$, $a_9 = 6$, $a_{10} = 2$, $a_{11} = 5$ e $a_{12} = 8$, obtendo assim uma repetição dos três primeiros termos. Segue que a sequência tem um período 10, ou seja, $a_n = a_{n+10}$ para todo n natural. Daí $a_{2020} = a_0 = 2$, $a_{2018} = a_8 = 7$ e $a_{2022} = a_2 = 8$ e o produto é igual a 112.

4. Note que

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{997^2} + \frac{1}{999^2} - \frac{1}{1002^2} - \frac{1}{1004^2} - \frac{1}{1006^2} - \cdots - \frac{1}{1998^2} - \frac{1}{2000^2} &= \\
1 + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{999^2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{998^2} + \frac{1}{1000^2}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{998^2} + \frac{1}{1000^2}\right) - \frac{1}{1002^2} \cdots - \frac{1}{2000^2} &= \\
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{999^2} + \frac{1}{1000^2} - \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{999^2} + \frac{1}{1000^2}\right) &= \\
\frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{999^2} + \frac{1}{1000^2}\right)&.
\end{aligned}$$

Logo a resposta é $\dfrac{3}{4}$.

5. Escrevemos $s_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$. Segue que

$$s_n - s_{n-1} = n s_{n-1} \implies s_n = (n+1)s_{n-1}.$$

Como $s_1 = 1$, obtemos

$$s_n = \frac{s_n}{s_{n-1}} \frac{s_{n-1}}{s_{n-2}} \cdots \frac{s_2}{s_1} = (n+1) \cdot n \cdot \cdots \cdot 3 = \frac{(n+1)!}{2}.$$

Logo, para $n > 1$, $a_n = s_n - s_{n-1} = \dfrac{(n+1)! - n!}{2} = n! \dfrac{(n+1) - 1}{2} = n! \dfrac{n}{2}$.

Segue que $n! \mid a_n \iff n$ é par ou 1. Isto conclui os dois itens.

6. a) $f(1) = \frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1$; $f(1) + f(2) = 2\sqrt{2} - 1 + \frac{5+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} - 1 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{3} - 1$.

b) Note que

$$f(n) = \frac{2n+1+\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} =$$
$$(2n+1)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) - n\sqrt{n+1} - (n+1)\sqrt{n} = (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}.$$

A soma de todos os $f(n)$ é telescópica e obtemos $A = 401\sqrt{401} - 1$.

7. Seja a_n o número na coluna X e linha n e b_n o número na coluna Y e linha n. Temos $a_1 = 2$ e $b_1 = 2$. Além disso, $a_{n+1} = a_n b_n$ e $b_{n+1} = \frac{a_n}{b_n}$. Segue que

$$a_{n+2} = a_{n+1}b_{n+1} = a_n b_n \frac{a_n}{b_n} = a_n^2 \qquad \text{e} \qquad b_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n b_n}{\frac{a_n}{b_n}} = b_n^2.$$

Obtemos assim que $a_{n+2k} = (a_n)^{2^k}$ e $b_{n+2k} = (b_n)^{2^k}$. Logo, na décima linha, o número é $(a_2)^{2^4} = (b_2)^{2^4} = 2^{16} = 65536$. Por outro lado, $a_{21} = a_{1+2\cdot 10} = a_1^{2^{10}} = 2^{2^{10}}$ e $b_{21} = b_{1+2\cdot 10} = b_1^{2^{10}} = 1$, logo a soma da letra b) é $2^{2^{10}} + 1$.

8. Para $n \geq 2$ tal que $x_n \neq 0$, vale que, pela regra de definição, $x_{n+1}x_n = x_n x_{n-1} - 1$. Considerando então, para todo $n \geq 1$, $y_n = x_n x_{n+1}$, descobrimos que $y_{n+1} = y_n - 1$. Assim, a sequência y_n é

$$y_1 = x_1 x_2 = ab,\ y_2 = ab - 1,\ \ldots,\ y_{ab+1} = 0,$$

caindo de 1 em 1 até se anular. Como $y_{ab+1} = x_{ab+1}x_{ab+2} = 0$ mas $y_n = x_{n+1}x_n \neq 0$ para todo $n \leq ab$, temos $x_n \neq 0$ para todo $n \leq ab+1$ e então $x_{ab+2} = 0$. Ou seja, Arnaldo escreve $ab + 2$ números no quadro.

9. Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ os amigos sentados nesta ordem e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a quantidade de dinheiro que cada um deles possui. Seja $a_1 = a$ e $a_2 = b$. Como a_2 é a média de a_1 e a_3, segue que $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2b - a$. Analogamente, $a_4 = 2a_3 - a_2 = 2(2b - a) - b = 3b - 2a$.

Afirmamos que, para $3 \leq k \leq n$, $a_n = (n-1)b - (n-2)a$. A prova é por indução forte. O caso base $k = 3$ e $k = 4$ já foi feito. Por outro lado, a_{k-1} é a média de a_{k-2} e a_k. Logo $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} = 2[(k-2)b - (k-3)a] - [(k-3)b - (k-4)a] = (k-1)b - (k-2)a$, o que conclui a prova dessa afirmação.

Contudo, observe que a_1 é a média entre a_n e a_2. Dessa forma,

$$a_n + a_2 = nb - (n-2)a = 2a_1 = 2a \iff nb = na \iff a = b.$$

Pela fórmula para a_n que obtivemos anteriormente, segue que todos são iguais.

10. Escrevemos $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Segue que $s_n - s_{n-1} = \frac{n+1}{n-1}s_{n-1} \iff \frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{2n}{n-1}$. Como $s_1 = 2$, obtemos

$$\frac{s_n}{2} = \frac{s_n}{s_{n-1}} \cdot \frac{s_{n-1}}{s_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{s_2}{s_1} = \frac{2n}{\cancel{n-1}} \cdot \frac{2\cancel{(n-1)}}{\cancel{n-2}} \cdot \frac{2\cancel{(n-2)}}{\cancel{n-3}} \cdot \cdots \cdot \frac{2 \cdot \cancel{2}}{1} = 2^{n-1}n.$$

Segue que $s_n = 2^n n$, donde $a_n = s_n - s_{n-1} = 2^n n - 2^{n-1}(n-1) = 2^{n-1}(2n - n + 1) = (n+1)2^{n-1}$ e $a_{2013} = 2014 \cdot 2^{2012}$.

11. Para que a raiz quadrada faça sentido, é necessário que $\frac{1}{2}x_{n+1} > x_n$, ou seja, $x_{n+1} > 2x_n > 0$ para todo $n \geq 1$. Segue por indução que $x_{n+1} > 2^n x_1$ para todo $n \geq 1$.

Por outro lado, $x_{n+2}^2 = \frac{1}{2}x_{n+1} - x_n \implies x_{n+1} > 2x_{n+2}^2$ para todo $n \geq 1$. Trocando o $n+1$ por n nesta relação e juntando com a anterior vem que $x_n > 2x_{n+1}^2 > 2(4x_n^2) \implies x_n < \frac{1}{8}$, para todo $n \geq 2$.

Contudo, $x_{n+1} > 2^n x_1$, e independentemente do valor de x_1, existe n tal que $2^n x_1 > \frac{1}{8}$. Logo a sequência não pode ser infinita.

12. Observe que

$$\frac{1}{k \cdot 2^{k-1}} - \frac{1}{(k+1)2^k} = \frac{2(k+1)-k}{k(k+1)2^k} = \frac{k+2}{k(k+1)2^k}.$$

Assim, a soma é igual a $\dfrac{1}{1 \cdot 2^{1-1}} - \dfrac{1}{(2021)2^{2020}} = 1 - \dfrac{1}{(2021)2^{2020}}$.

13. Se $m = 1$ a afirmação é claramente verdadeira. Observamos que, quando $n \geq 3$,

$$a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} + 1 = (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n-2})a_{n-1} + 1 = (a_{n-1} - 1)a_{n-1} + 1.$$

Daí, $a_n - 1 = (a_{n-1} - 1)a_{n-1} \implies \dfrac{1}{a_n - 1} = \dfrac{1}{a_{n-1} - 1} - \dfrac{1}{a_{n-1}} \implies \dfrac{1}{a_{n-1}} = \dfrac{1}{a_{n-1} - 1} - \dfrac{1}{a_n - 1}$ e então, se $m \geq 2$,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_{m+1} - 1} = 2 - \frac{1}{a_{m+1} - 1}.$$

Como $a_m > 1$ para todo $m \geq 2$, a afirmação também segue neste caso.

14. Multiplicando por $1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^3}}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^{2020}}}\right) &= \\
\left[1 - \left(\frac{1}{3^2}\right)^2\right] \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^3}}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^{2020}}}\right) &= \\
\left(1 - \frac{1}{3^{2^2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^3}}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^{2020}}}\right) &= \\
\left[1 - \left(\frac{1}{3^{2^2}}\right)^2\right] \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^3}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^4}}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^{2020}}}\right) &- \\
\left(1 - \frac{1}{3^{2^3}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^3}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^4}}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^{2020}}}\right) &= \\
&\vdots \\
\left(1 - \frac{1}{3^{2^{2020}}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2^{2020}}}\right) = \left(1 - \frac{1}{3^{2^{2021}}}\right)&.
\end{aligned}$$

Logo o produtório inicial é igual a $\dfrac{9}{8}\left(1 - \dfrac{1}{3^{2^{2021}}}\right)$.

15. Considere as duas operações no valor do índice: $O_1(n) = 2n$ e $O_2(n) = 2n + 1$. Afirmamos que, partindo de um mesmo valor $n \geq 1$, duas sequências de operações resultam no mesmo índice somente se elas forem idênticas. A prova é por indução no tamanho da menor sequência de operações.

(i) Caso base: Se uma das operações é realizada apenas uma vez, o índice resultante é $2n$ ou $2n + 1$. Se na outra sequência executamos mais de uma operação o resultado final é ao menos $4n$, que é maior que $2n + 1$, pois $n \geq 1$. Logo para que valha a igualdade é necessário que a outra sequência de operações envolva apenas uma operação e esta tem que ser idêntica a original.

(ii) Passo indutivo: Se a última operação realizada para cada uma das sequências não for a mesma, uma das duas resulta num número ímpar e a outra num número par, logo o índice resultante seria diferente. Segue que ambas tem que terminar com a mesma operação. Invertendo-as, obtemos sequências com exatamente uma operação a menos resultando no mesmo índice. Pela hipótese de indução, elas tem que ser idênticas. Isto conclui a prova.

Voltando ao problema, iremos usar estas operações para, partindo de 1, construir índices n tais que $a_n = 111$. Note que executar a operação O_1 aumentá o valor de a_n em 1 e a operação O_2 o multiplica por 10. Dessa maneira, podemos executar a operação O_2 no máximo duas vezes, pois caso contrário o número a_n obtido seria ao menos $1 \cdot 10^3 = 1000$. Temos então os seguintes casos:

1. O_2 nunca é realizada. Segue que $a_{O_1^{110}(1)} = 1 + 110 = 111$, onde o índice indica que aplicamos a operação O_1 110 vezes.

2. O_2 é aplicada uma vez. Ela não pode aparecer depois de 11 operações do tipo O_1, pois nesse caso o número final seria ao menos $(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{12 \text{ vezes}}) \cdot 10 = 120$. Podemos assim construir índices n tais que $a_n = 111$ aplicando a operação O_1 i vezes, com $i = 0, 1, \ldots, 10$, aplicar O_2 e depois aplicar O_1 novamente o número de vezes que for necessário. Temos então 11 índices deste tipo.

3. Por fim, O_2 é aplicada duas vezes. Neste caso, é fácil verificar que $n_1 = O_1(O_2(O_1(O_2(1))))$ e $n_2 = \underbrace{O_1(\cdots(O_1}_{11\text{vezes}}((O_2(O_2(1))\cdots)$ são os únicos índices tais que $a_n = 111$.

Concluímos que 111 aparece 14 vezes na sequência.

16. A observação crucial aqui é que a_n é uma sequência que fica muito tempo parada, e quando aumenta, aumenta no máximo em 1. Vamos encontrar esse momento em que ela salta.

Seja n um inteiro positivo e m um inteiro tal que $n^2 \leq m \leq (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$. Neste caso $n \leq \sqrt{m} < (n+1)$. Porém, $a_m = n$ quando $\sqrt{m} < n + \frac{1}{2}$ e $a_m = n + 1$ quando $\sqrt{m} > n + \frac{1}{2}$ (note que nunca pode ser igual a $n + \frac{1}{2}$!!!).

Observe que $\sqrt{m} < n + 1/2 \iff m < n^2 + n + 1/4$, e, como m é inteiro, segue que $a_m = n$ para todos os valores de m entre n e $n^2 + n$ inclusive e $a_m = n + 1$ para todos os valores entre $n^2 + n + 1$ e $n^2 + 2n = (n + 1^2) - 1$ inclusive. Como consequência, entre n^2 e $(n + 1)^2 - 1$ inclusive, b_n toma os valores[1]

$$b_{n^2} = n^2 + n, \quad b_{n^2+1} = n^2 + 1 + n, \quad b_{n^2+2} = n^2 + 2 + n, \quad \ldots, \quad b_{n^2+n} = (n^2 + n) + n = n^2 + 2n,$$
$$b_{n^2+n+1} = (n^2 + n + 1) + n + 1 = n^2 + 2n + 2, \quad b_{n^2+n+2} = (n^2 + n + 2) + n + 1 = n^2 + 2n + 3,$$
$$\ldots, \quad b_{n^2+2n} = (n^2 + 2n) + n + 1 = n^2 + 3n + 2,$$

percorrendo todos os valores entre n^2+n+1 e n^2+3n+2 inclusive, excluindo-se $n^2+2n+1 = (n+1)^2$.

Segue, por indução ou particionando os inteiros positivos em intervalos do tipo $[n^2, (n+1)^2 - 1]$, que apenas os quadrados perfeitos não aparecem na sequência, ou seja, $c_n = n^2$.

[1] o importante aqui é notar que $b_{m+1} - b_m$ é sempre 1, exceto quando $m = n^2 + n$, neste caso sendo igual a 2.

17. Escrevemos os primeiros termos da sequência:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 2,\ a_4 = 5,\ a_5 = 3,\ a_6 = 6,\ a_7 = 9,\ \ldots$$

Afirmamos que, para todo k natural, incluindo o zero,

$$a_n = \begin{cases} 5k+1, & \text{quando } n = 5k+1 \\ 5k+4, & \text{quando } n = 5k+2 \\ 5k+2, & \text{quando } n = 5k+3 \\ 5k+5, & \text{quando } n = 5k+4 \\ 5k+3, & \text{quando } n = 5k+5. \end{cases}$$

A prova é por indução forte em k.

(i) Caso base: $k = 0$. Segue da lista dos primeiros termos acima.

(ii) Passo indutivo: Suponha válido para $k' \leq k$. Temos que $a_{5k+6} = a_{5k+5} + 3 = 5k + 6$, pois $a_{5k+5} - 2 = 5k + 1$ já apareceu como a_{5k+1}. Da mesma maneira, $a_{5k+7} = a_{5k+6} + 3 = 5k + 9$, pois $a_{5k+6} - 2 = 5k + 4$ já apareceu como a_{5k}. Em contrapartida, $a_{5k+8} = a_{5k+7} - 2 = 5k + 7$, pois este número ainda não apareceu na sequência (aqui estamos usando a hipótese de indução forte!). Analogamente, $a_{5k+9} = a_{5k+8} + 3 = 5k + 10$ e por fim obtemos $a_{5k+10} = a_{5k+9} - 2 = 5k + 8$, mostrando que a afirmação permanece válida pra $k + 1$ e concluindo a prova.

Por fim, todo quadrado perfeito é do tipo $5k + 5$, $5k + 1$ ou $5k + 4$. Estes valores correspondem a índices do tipo $5k + 4$, $5k + 1$ e $5k + 2$. Checando nossa fórmula, verificamos que são obtidos a partir do seu antecessor somando 3.

18. Seja $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{2020} \frac{i}{2^i}$. Segue que

$$2S = \sum_{i=1}^{2020} \frac{2i}{2^i} = \sum_{i=1}^{2020} \frac{i}{2^{i-1}} = \sum_{i=0}^{2019} \frac{i+1}{2^i} = \sum_{i=0}^{2019} \frac{i}{2^i} + \sum_{i=0}^{2019} \frac{1}{2^i},$$

donde

$$2S = S + \frac{0}{2^0} - \frac{2020}{2^{2020}} + \frac{1 - \frac{1}{2^{2020}}}{1 - \frac{1}{2}} = S + \frac{2^{2021} - 2 - 2020}{2^{2020}} \implies S = \frac{2^{2021} - 2022}{2^{2020}}.$$

19. Observe que, para todo $i = 1, 2, \ldots, n - 1$,

$$\frac{1}{(1 + a_1) \cdots (1 + a_i)} - \frac{1}{(1 + a_1) \cdots (1 + a_i)(1 + a_{i+1})} = \frac{a_{i+1}}{(1 + a_1) \cdots (1 + a_i)(1 + a_{i+1})}$$

Logo a soma é telescópica e igual a

$$\frac{a_1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_1} - \frac{1}{(1 + a_1) \cdots (1 + a_n)} = 1 - \frac{1}{(1 + a_1) \cdots (1 + a_n)}.$$

20. Da regra, obtemos $a_n + 1 = \frac{a_{n+1}}{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Usando o fato que $a_1 = 1$, temos

$$P_n = \frac{a_1 + 1}{a_1} \cdot \frac{a_2 + 1}{a_2} \cdots \frac{a_n + 1}{a_n} = \frac{a_2}{2a_1} \cdot \frac{a_3}{3a_2} \cdots \frac{a_n}{na_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{(n+1)a_n} = \frac{a_{n+1}}{2 \cdot 3 \cdots (n+1)a_1} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Logo $\dfrac{P_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

21. Começamos mostrando que a sequência não pode ser, a partir de certo ponto, para sempre positiva. Se x_n, x_{n+1} e x_{n+2} são todos positivos, segue que $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ e daí $x_{n+3} = x_{n+1} - x_n - x_{n+1} = -x_n$ é negativo.

Mostremos que existem sempre dois termos consecutivos que são não-positivos. Suponha que não existem tais termos. Pela afirmação anterior existiria n tal que x_{n-1} é positivo, x_n é não-positivo e x_{n+1} é positivo. Logo $x_{n+1} = -x_n - x_{n-1} < -x_n$, donde $x_{n+1} + x_n < 0$. Segue que $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ é positivo, donde $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} = -x_n$ é não-negativo, $x_{n+4} = x_{n+3} - x_{n+2} = -x_{n+1}$ é negativo, e por fim $x_{n+5} = -x_{n+4} - x_{n-3} = x_{n+1} + x_n < 0$ é negativo, contradição.

Sendo então $x_n = a$ e $x_{n+1} = b$ dois termos não-positivos consecutivos da sequência, podemos verificar que os próximos termos da sequencia tomam os seguintes valores:

$$a,\ b,\ -b-a,\ -2b-a,\ -b,\ a+b,\ -a,\ -2a-b,\ -a-b,\ a,\ b.$$

Conclui-se que a sequência é periódica, como queríamos demonstrar.

22. Este exercício envolve cancelamentos e produtos notáveis:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{2019^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2020^2}\right) =$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{2019}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2019}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2020}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2020}\right) =$$

$$\left(\frac{2-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3-1}{3}\right)\cdot\left(\frac{3+1}{3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{2019-1}{2019}\right)\cdot\left(\frac{2019+1}{2019}\right)\cdot\left(\frac{2020-1}{2020}\right)\cdot\left(\frac{2020+1}{2020}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\cancel{\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot\cancel{\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{2018}{2019}\right)\cdot\cancel{\left(\frac{2020}{2019}\right)\cdot\left(\frac{2019}{2020}\right)}\cdot\left(\frac{2021}{2020}\right) = \frac{2021}{4040}.$$

23. Começamos fatorando $4k^4+1 = 4k^4+4k^2+1-4k^2 = (2k^2+1)^2-4k^2 = (2k^2-2k+1)(2k^2+2k+1)$. Segue que

$$\frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2k^2+2k+1} = \frac{4k}{(2k^2-2k+1)(2k^2+2k+1)} = \frac{4k}{4k^4+1}.$$

Dividindo por 4 obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4+1} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2k^2+2k+1}\right).$$

Definindo $a_k = 2k^2 - 2k + 1$, obtemos $a_{k+1} = 2(k+1)^2 - 2(k+1) + 1 = 2k^2 + 2k + 1$, logo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4+1} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}\right) = \frac{n(n+2)}{4n^2+4n+2}.$$

24. Começamos mostrando que, para algum n muito grande, $a_n \le 4$. Suponha por absurdo que exista N tal que $a_n > 4$ para todo $n \ge N$. Observe que $a_n = a_{n+1} \implies a_{n+2} = 4$. Logo podemos assumir que $a_n \ne a_{n+1}$ para todo $n \ge N$.

Como $a < b \implies \lfloor a \rfloor \le \lfloor b \rfloor$, segue que

$$a_{n+2} = \left\lfloor \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{2a_{n+1}}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a_n}{4} \right\rfloor \le \frac{2a_{n+1}}{4} + \frac{2a_n}{4} \le \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

e, como $a_n \neq a_{n+1}$, $a_{n+2} < \max(a_n, a_{n+1})$.

Da mesma forma, $a_{n+3} < \max(a_{n+1}, a_{n+2})$, $a_{n+4} < \max(a_{n+2}, a_{n+3})$ e $a_{n+5} < \max(a_{n+4}, a_{n+3})$, donde $\max(a_{n+4}, a_{n+5}) < \max(a_n, a_{n+1})$. Logo, como os números a_i são inteiros, a sequência $b_k = \max(a_{N+4k}, a_{N+4k+1})$ sempre diminui ao menos 1, e em algum momento tem que ser menor ou igual a 4, absurdo.

Por fim, pela desigualdades das médias e pelo fato que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \geq \lfloor x+y \rfloor - 1$,

$$a_{n+2} = \left\lfloor \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{2a_{n+1}}{a_n} + \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right\rfloor - 1 \geq 4 - 1 = 3.$$

Dessa forma, $a_n \geq 3$ sempre que $n \geq 2$. Juntando com o fato anterior, obtemos o resultado.

25. Observe inicialmente que, por um produto telescópico,

$$n = \left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right),$$

logo todo $n \geq 2$ tem uma representação como produto de $n-1$ números *irie* distintos. Por outro lado,

$$\left(1 + \frac{1}{m-1}\right) = \left(1 + \frac{1}{2m-2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2m-1}\right)$$

para qualquer inteiro $m \geq 2$. Dessa forma podemos, a partir de uma representação de n como produto de $k \geq n-1$ números *irie* distintos podemos obter uma nova representação, dessa vez como produto de $k+1$ números *irie* distintos, trocando o menor número *irie* da original, $\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)$, pelos dois números $\left(1 + \frac{1}{2m-2}\right)$ e $\left(1 + \frac{1}{2m-1}\right)$, pois estes números são menores que $\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)$ e logo menores que, e distintos de, todos os números *irie* da representação original. O resultado segue por indução em k.

26. Fixe algum valor de $n \geq 3$. Seja $f(n) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k}$ a fatoração em primos de $f(n)$. Se $k > 1$, algum dos números $p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, não pode dividir n, pois se todos o dividissem, então $f(n) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k}$ também o dividiria, contrariando a definição de $f(n)$. Em contrapartida, para qualquer $i = 1, 2, \ldots, k$ vale que $p_i^{\alpha_i} < p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k} = f(n)$, e tomando $p_i^{\alpha_i} \nmid n$ entraríamos em contradição com a minimalidade de $f(n)$. Logo k tem que ser igual a 1 e $f(n)$ é sempre um número da forma p^α, onde p é primo.

Por outro lado, $f(p^\alpha)$ é igual a 2 se p for primo ímpar e igual a 3 se p for igual a 2 e $\alpha > 1$. Segue que, quando $n \geq 3$,

$$a_n = \begin{cases} a_{f(n)} + 1 = a_2 + 1 = 2, \text{ quando } f(n) = 2, \text{ ou seja, } n \text{ é ímpar.} \\ a_{f(n)} + 1 = a_{f(f(n))} + 2 = \begin{cases} a_2 + 2 = 3, \text{ quando } f(n) = p^\alpha \text{ com } p \text{ primo ímpar.} \\ a_3 + 2 = 4, \text{ quando } f(n) = p^\alpha \text{ com } p = 2 \text{ primo e } \alpha > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Logo basta tomar $C = 4$ para obter a limitação.

27. A ideia deste exercício é usar que $n!$ é múltiplo de todos os números de 1 até n

a) Tome $a_i = i$ e $b_i = n! + i + 1$ para $i = 1, \ldots, n$. Note que para cada i existe k inteiro tal que $b_i = k \cdot a_i + 1$, logo $\operatorname{mdc}(a_i, b_i) = \operatorname{mdc}(a_i, b_i - k \cdot a_i) = 1$.

b) Tome $a_i = i+1$ e $b_i = (n+1)! + i + 1$ para $i = 1, \ldots, n$. Segue da observação que $(i+1) \mid (n+1)!$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

28. Observe que, para $x > 0$,

$$\frac{x}{x+3} < \frac{x+1}{x+4} \iff x^2 + 4x < x^2 + 4x + 3.$$

Logo, a primeira fração do produto A, $\frac{1}{4}$, é menor que a primeira do produto B, $\frac{2}{5}$; a segunda de A, $\frac{3}{6}$, é menor que a segunda de B, $\frac{4}{7}$ e assim por diante até $\frac{597}{600} < \frac{598}{601}$. Portanto, $A < B$.

Consequentemente,

$$A^2 < AB = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \dots \cdot \frac{597}{600} \cdot \frac{598}{601} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{599 \cdot 600 \cdot 601} = \frac{1}{599 \cdot 100 \cdot 601} = \frac{1}{5990 \cdot 6010} < \left(\frac{1}{5990}\right)^2,$$

donde segue o resultado.

29. Multiplicando, obtemos $a_{i+1}a_{i+2} + a_{i+2} = a_i^2 + a_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Somando todas as equações, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}a_{i+2} + a_{i+2}) = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + a_i)$$

Porém, usando o fato que $a_{n+1} = a_1$ e $a_{n+2} = a_2$, a soma $\sum_{i=1}^{n} a_{i+2}$ é igual a $\sum_{i=1}^{n} a_i$ e $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2\right)$. Dessa forma, a equação original se torna

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2a_{i+1}a_{i+2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2) \iff \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_{i+2})^2 = 0.$$

Daí $a_{i+1} = a_{i+2}$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e então $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

30. O importante aqui é manipular as equações de forma esperta. Somando 1 dos dois lados na equações, ficamos com

$$1 + a_{n+1} = \frac{(1 + a_n)(1 + b_n)}{b_n}, \quad 1 + b_{n+1} = \frac{(1 + b_n)(1 + a_n)}{a_n}$$

e consequentemente,

$$\frac{1}{1 + a_{n+1}} - \frac{1}{1 + b_{n+1}} = \frac{b_n}{(1 + a_n)(1 + b_n)} - \frac{a_n}{(1 + b_n)(1 + a_n)} = \frac{1}{1 + a_n} - \frac{1}{1 + b_n}.$$

Segue então que

$$\frac{1}{a_{n+1} + 1} - \frac{1}{b_{n+1} + 1} = \frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{b_n + 1} = \dots = \frac{1}{a_1 + 1} - \frac{1}{b_1 + 1} = \frac{1}{6},$$

por causa das condições inciais $a_1 = 1$ e $b_1 = 2$. Mas como b_n e a_n são sempre positivos (por indução), isto implica que

$$\frac{1}{a_{2008} + 1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{b_{2008} + 1} > \frac{1}{6} \implies a_{2008} + 1 < 6 \implies a_{2008} < 5.$$

31. Observe que a sequência dos a_n é crescente. Por outro lado,

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k^2 + a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}^3 - a_k^3},$$

donde, para todo $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}^3 - a_n^3}$. Como a sequência é crescente, $a_{n+1} - a_n \neq 0$, e então $a_{n+1}^3 - a_n^3 = 1$ para todo $n \geq 1$. Segue que

$$a_{16}^3 - a_8^3 = (a_{16}^3 - a_{15}^3) + (a_{15}^3 - a_{14}^3) + \cdots + (a_9^3 - a_8^3) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{8 vezes}} = 8.$$

Mas isto implica que $a_{16}^3 = 8 + a_8^3 = 8 + 8 = 16 \implies a_{16} = 2\sqrt[3]{2}$.

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo