POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

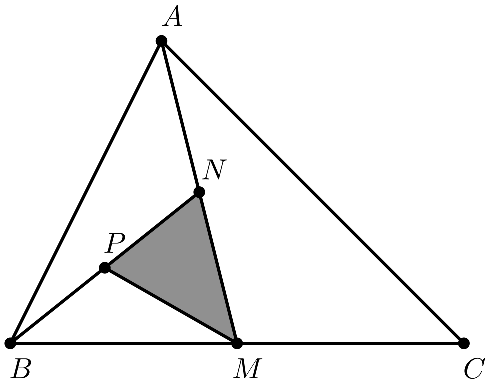
Nível 2

Áreas

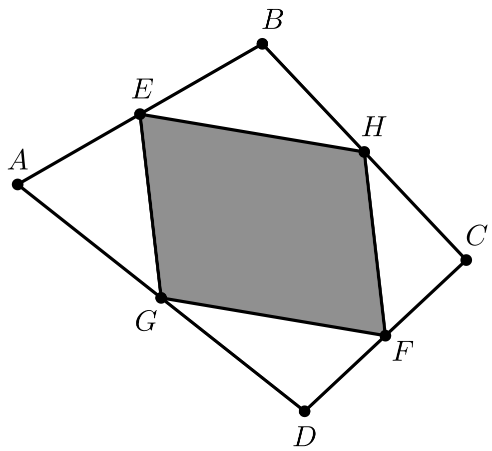
Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

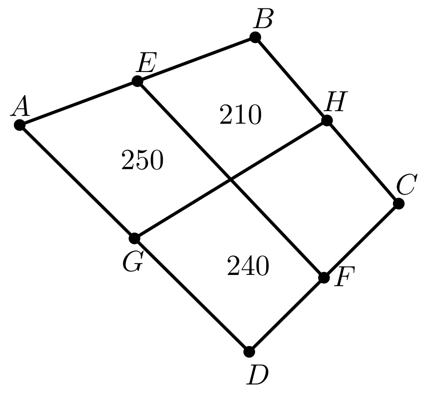
Problema 1. Na figuras abaixo ABC é um triângulo de área $72cm^2$ e M, N, P são pontos médios. Determine a área da região sombreada.



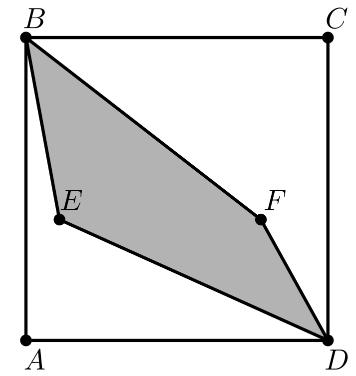
Problema 2. Na figura, $ABCD$ é um quadrilátero de área $200cm^2$ e E, F, G, H são pontos médios. Determine a área sombreada.



Problema 3. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrilátero e E, F, G, H são pontos médios. Determine a área que está faltando.

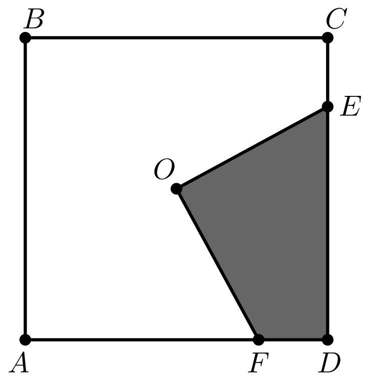


Problema 4. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de lado $6cm$ e EF é um segmento paralelo ao lado AD. Sabendo que a área sombreada é um terço da área do quadrado determine a medida do segmento EF.

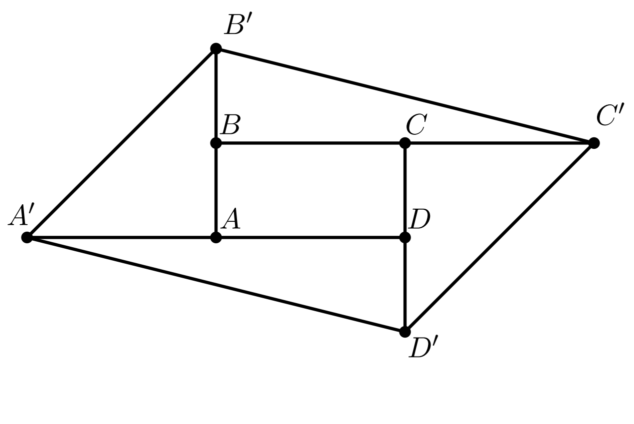


Problema 5. No trapézio $ABCD$, $AD \parallel BC$. $\angle A = \angle D = 45°$, enquanto $\angle B = \angle C = 135°$. Se $AB = 6$ e a área de $ABCD$ é 30, ache BC.

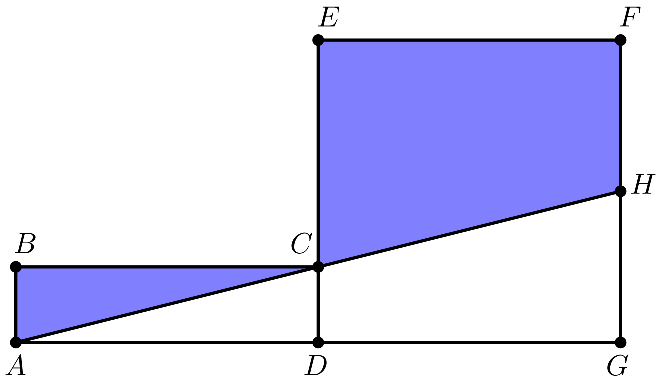
Problema 6. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de lado $4cm$ e O é o seu centro. Determine a área marcada sabendo que o ângulo $\angle EOF$ é reto.



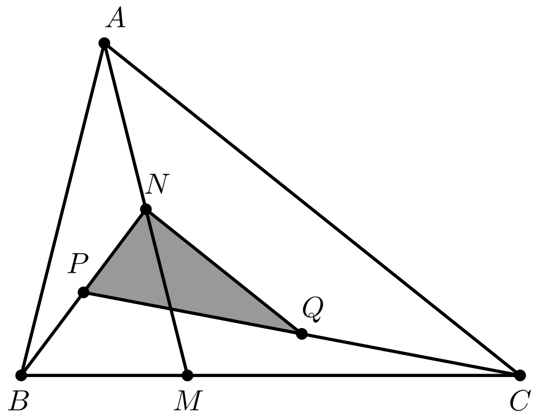
Problema 7. Na figura abaixo $ABCD$ é um retângulo de área $11cm^2$. Sabemos também que $A'A = AD$, $BB' = BA$, $CC' = CB$ e $DD' = DC$. Determine a área do quadrilátero $A'B'C'D'$.



Problema 8. Na figura abaixo $DEFG$ é um quadrado de lado $4cm$ e $ABCD$ um retângulo cujos lados têm medidas $1cm$ e $4cm$. O encontro da reta AC com a reta FG é o ponto H. Determine a área marcada.



Problema 9. Na figuras abaixo ABC é um triângulo de área $72cm^2$. Seja M um ponto qualquer no lado BC e sejam N, P e Q pontos médios. Determine a área da região sombreada.



Soluções

1. Usando que P é ponto médio de BN, temos que

$$[MNP] = \frac{[BMN]}{2}.$$

Usando que N é ponto médio de AM, temos que

$$[BMN] = \frac{[ABM]}{2}.$$

Usando que M é ponto médio de BC, temos que

$$[ABM] = \frac{[ABC]}{2}.$$

Assim, temos

$$[MNP] = \frac{[BMN]}{2} = \frac{[ABM]}{4} = \frac{[ABC]}{8} = 9cm^2.$$

2. Note que EH é base média do $\triangle ABC$ e que FG é base média do $\triangle ADC$. Logo temos as seguintes relações entre áreas:

$$[BEH] = \frac{[ABC]}{4} \text{ e } [DFG] = \frac{[ADC]}{4}.$$

E isto implica que

$$[BEH] + [DFG] = \frac{[ABCD]}{4}.$$

Analogamente, como EG e FH são bases médias dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle CBD$, temos

$$[AEG] + [CFH] = \frac{[ABCD]}{4}.$$

Consequentemente,

$$[EGFH] = \frac{[ABCD]}{2} = 100cm^2.$$

Note que também foi mostrado que $EGFH$ é um paralelogramo.

3. Como mostrado no exercício anterior, $EGFH$ é um paralelogramo, logo ele é dividido pelas suas diagonais, EF e GH, em quatro triângulos de área igual. Chamemos a área desses triângulos de x.

Denotemos também $y = [CFH]$. Veja que $[ABCD] = 210 + 250 + 240 + x + y = 700 + x + y$.

No exercício anterior foi mostrado também que $[BEH] + [DFG] = \frac{[ABCD]}{4}$ e que $[EGFH] = \frac{[ABCD]}{2}$. Isto implica que

$$210 - x + 240 - x = \frac{700 + x + y}{4}$$

e

$$4x = \frac{700 + x + y}{2}.$$

Resolvendo este sistema, encontramos $x = 112,5$ e $y = 87,5$. Assim, a área sombreada é

$$x + y = 200.$$

4. Chamemos h a distância entre as retas EF e BC, portanto a distância entre as retas EF e AD será igual a $6 - h$.

Veja que
$$[BEDF] = [BEF] + [DEF] = \frac{h \cdot EF}{2} + \frac{(6-h) \cdot EF}{2} = 3 \cdot EF.$$

Como $[BEDF] = \frac{[ABCD]}{3} = \frac{36}{3} = 12$, encontramos que $EF = 4$.

5. Seja E o ponto de encontro das retas AB e CD. Note que $\triangle EBC$ e $\triangle EAD$ são retângulos e isósceles. Desta forma, temos
$$\frac{AE^2}{2} = [EAD] = [EBC] + [ABCD] = \frac{BE^2}{2} + 30.$$
Como $AE = 6 + BE$, temos
$$(6 + BE)^2 = BE^2 + 60,$$
donde concluímos que $BE = 2$. Usando Pitágoras no $\triangle EBC$, obtemos
$$BC = \sqrt{BE^2 + EC^2} = \sqrt{2 \cdot BE^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

6. Tracemos OC e OD. Como O é o centro do quadrado (ponto de interseção das diagonais), temos que
$$\angle OCE = \angle ODF = 45^\circ.$$
Por outro lado, como $\angle COD = \angle EOF = 90^\circ$, temos
$$\angle COE = \angle COD - \angle DOE = \angle EOF - \angle DOE = \angle DOF.$$
Assim, como também temos que $OC = OD$, concluímos, pelo critério a.l.a., que os triângulos $\triangle OCE$ e $\triangle ODF$ são congruentes. Consequentemente, eles tem a mesma área. Logo
$$[OEDF] = [OCD] = \frac{[ABCD]}{4} = 4cm^2.$$

7. Veja que
$$[AA'B'] = \frac{AB' \cdot AA'}{2} = \frac{2 \cdot AB \cdot AD}{2} = [ABCD].$$
Analogamente, também teremos que
$$[BB'C'] = [CC'D'] = [DD'A'] = [ABCD].$$
Logo
$$[A'B'C'D'] = 4 \cdot [ABCD] = 44cm^2.$$

8. Note que CD é base média do $\triangle AGH$, logo $GH = 2 \cdot CD = 2cm$.

Seja I o ponto de encontro de BC com FG. Como os retângulos $ABCD$ e $CDGI$ são iguais. Temos que $GI = IH = 1cm$.

Desta forma vemos que os triângulos ABC e CHI são congruentes e, portanto, têm a mesma área. A área sombrada será igual então a
$$CEFI = EF \cdot EC = 4cm \cdot 3cm = 12cm^2.$$

9. Usando que Q é o ponto médio de PC, temos

$$[NPQ] = \frac{[NPC]}{2}.$$

Usando que P é o ponto médio de NB, temos

$$[NPC] = \frac{[NBC]}{2}.$$

Usando que N é o ponto médio de AM, temos

$$[NBC] = \frac{[ABC]}{2}.$$

Assim, obtemos

$$[NPQ] = \frac{[NPC]}{2} = \frac{[NBC]}{4} = \frac{[ABC]}{8} = 9cm^2.$$