Problemas Resolvidos

Nível 2

Grafos

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo

Problemas

Problema 1. Mostre que em um grafo qualquer o número de vértices de grau ímpar é par.

Problema 2. Existe algum grafo cujos vértices tem grau 4, 4, 4, 4, 2?

Problema 3. Cada um dos 50 cientistas participando em uma conferência conhece pelo menos outros 25 cientistas também nela presentes. Prove que existem 4 cientistas que podem se sentar em uma mesa circular de forma que cada um deles conheça seus dois vizinhos.

Problema 4. Existe algum poliedro que tenha um número ímpar de faces tais que cada uma delas tem um número ímpar de arestas?

Problema 5. Prove que existe um grafo com $2n$ vértices cujos graus são 1, 1, 2, 2, $\ldots$, n, n.

Problema 6. Em um país todos os pares de cidades são conectados por estradas de mão única. Prove que existe uma cidade a partir da qual é possível viajar para qualquer outra.

Problema 7. Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos.

a) Seja G um grafo no qual todo vértice tem grau maior ou igual a 2. Mostre que G tem um ciclo.

b) Prove que em toda árvore com pelo menos uma aresta existe algum vértice de grau 1.[1]

c) Prove que se uma árvore tem n vértices então ela tem exatamente $n-1$ arestas.

d) Todo grafo de n vértices com $n-1$ arestas é uma árvore?

e) Mostre que se um grafo tem n vértices e mais que $n-1$ arestas, então ele tem um ciclo.

Problema 8. Em Agrabah existe apenas um tipo de meio de transporte: tapete mágico voador. Cada linha aérea conecta um par de cidades diferente. Vinte e uma linhas de tapete voadores servem a capital. Uma única linha serve a cidade de Longíssima e cada uma das outras cidades é servida por exatamente vinte linhas de tapetes voadores. Mostre que é possível viajar de tapete mágico da capital para Longíssima (talvez fazendo conexões entre diferentes linhas de tapetes voadores).

Problema 9. Prove que todo grafo conexo de n vértices contém uma "árvore geradora", ou seja, uma árvore com n vértices.

Problema 10. Gugulândia é um país formado por 100 cidades além de sua capital. Alguns pares de cidades (incluindo a capital) são ligados por estradas de mão única. De cada cidade diferente da capital, saem exatamente 20 estradas e chegam exatamente 21 estradas. Mostre que é impossível dirigir de qualquer uma destas para a capital respeitando as regras de trânsito.

[1] Vértices de grau 1 costumam ser chamados de *folhas*.

Problema 11. Existem 100 cidades em um país e algumas delas são ligadas por linhas áreas. Sabe-se que a partir de qualquer cidade pode se viajar a qualquer outra (talvez fazendo várias conexões). Prove que é possível viajar pelo país e visitar todas as cidades fazendo não mais que 196 voos.

Problema 12. Todos os vértices de um grafo G tem grau menor ou igual a d. Mostre que é possível colorir os vértices de G utilizando $d+1$ cores de forma que nenhum par de vértices adjacentes tenha a mesma cor.

Problema 13. (EUA 78) Nove matemáticos se encontraram em uma conferência internacional. Dados quaisquer 3 matemáticos, ao menos dois deles falam uma mesma língua. Se cada um dos matemáticos conhece no máximo 3 línguas, prove que existe um trio de matemáticos que pode conversar entre si em uma mesma língua.

Problema 14. (Rússia 2004) Um país tem 1001 cidades, e cada par de cidades está conectado por uma estrada de mão única. De cada cidade saem exatamente 500 estradas e chegam exatamente 500 outras estradas. Este ano, uma república de 668 cidades se declarou independente. Mostre que é possível ir de qualquer cidade da república a qualquer outra cidade da república através dessas estradas respeitando sua orientação e sem ter que em algum momento visitar alguma cidade fora da república.

Problema 15. (EUA 89) Os 20 membros de um clube de tênis disputaram exatamente 14 partidas entre eles, cada membro havendo disputado ao menos uma partida. Prove que existe um conjunto de 6 partidas que foram disputadas por 12 jogadores distintos.

Problema 16. Seja G um grafo com n vértices. Mostre que existe uma partição do seu conjunto de vértices $V = V_1 \cup V_2$ tal que todo vértice v em V_1 tem pelo menos a mesma quantidade de vizinhos em V_2 que ele tem em V_1 e todo vértice v em V_2 tem pelo menos a mesma quantidade de vizinhos em V_1 que ele tem em V_2.

Suponha agora que nenhum vértice é isolado. Mostre que existe um subconjunto A de no máximo $n/2$ vértices tal que todo vértice de G pertence a A ou está conectado a algum vértice de A.

Problema 17. (IMC 1999) São marcados $2n$ pontos em um reticulado $n \times n$. Prove que para algum $k > 1$, podemos selecionar $2k$ pontos marcados distintos, digamos $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$, de maneira que a_1 e a_2 estão na mesma linha, a_2 e a_3 estão na mesma coluna, ..., a_{2k-1} e a_{2k} estão na mesma linha e a_{2k} e a_1 estão na mesma coluna.

Problema 18. (Treinamento Cone Sul 2008) Em um torneio de tênis com 14 jogadores, cada um joga com todos os outros exatamente uma vez e não há empates. Prove que é possível escolher 3 jogadores para os quais qualquer um dos outros 11 jogadores perdeu para pelo menos um desses 3.

Problema 19. (Cone Sul 2013) Semciclolândia é um país com 500 cidades e 2013 estradas de mão dupla, cada uma conectando diretamente duas cidades. Duas cidades A e B são chamadas de vizinhas se existe uma estrada que as conecta e duas cidades A e B são chamadas de quase-vizinhas se existe uma cidade C tal que A é vizinha de C e C é vizinha de B. Sabemos que em Semciclolândia, não existem duas cidades conectadas diretamente por mais de uma estrada e não existem quatro cidades A, B, C e D tais que simultaneamente A é vizinha de B, B é vizinha de C, C é vizinha de D e D é vizinha de A. Demonstrar que existe uma cidade que é quase-vizinha de pelo menos 57 cidades.

Problema 20. (OBM 2007) Em um certo país, há 21 cidades e o governo pretende construir n estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente duas das cidades do país. Qual o menor valor de n para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer duas cidades (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)?

Problema 21. (Bay Area 2005) Existem 1000 cidades no reino de Euleria e alguns pares de cidades são ligados por uma estrada de terra. E possível viajar de uma cidade para qualquer outra através das estradas de terra. Prove que o governo de Euleria pode pavimentar algumas estradas de maneira que de cada cidade saia um número ímpar de estradas pavimentadas.

Problema 22. Um grafo G possui n vértices ($n > 3$). Suponha que quaisquer dois vértices de G possuam exatamente um vértice vizinho.

a) Se x e y não são adjacentes, prove que eles têm o mesmo grau.

b) Prove que se não existe vértice de grau $n-1$, então o grafo é regular, isto é, todos os vértices possuem o mesmo grau.[2]

Problema 23. (Teste Cone Sul 2017) Uma empresa de instalação é contratada para colocar cabos entre 25 computadores. Esses cabos serão usados para passar informações entre computadores de forma que: cada cabo liga exatamente dois computadores, uma informação pode ir nos dois sentidos num cabo (isto é, se um cabo liga o computador A ao computador B, então qualquer informação pode ir do computador A para o computador B ou vice-versa por esse cabo) e, para todo conjunto de quatro computadores, deve haver um caminho, entre cabos, para a informação sair de qualquer computador desse grupo e chegar a qualquer outro computador desse mesmo grupo, usando apenas cabos que conectem computadores de tal grupo. Determine a quantidade mínima necessária de cabos que a empresa deverá colocar.

Problema 24. (Turquia 2011) Em um exame, cada estudante escolhe 1 problema de matemática e 1 problema de física dentre 20 problemas de matemática e 11 problemas de física. Nenhum par de problemas foi escolhido por mais que 1 estudante. Além disso, pelo menos um dos problemas escolhidos por cada estudante foi resolvido por no máximo 1 um outro estudante. No máximo, quantos estudantes realizaram este exame?

[2] Na verdade, o Teorema da amizade mostra que esta hipótese não acontece em grafo nenhum, porém sua demonstração está além dos objetivos deste programa.

Soluções

1. Como vimos nas aulas e no matéria teórico, o número de arestas é igual a metade da soma dos graus de cada vértice:

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{v\in G} d(v).$$

Note que o número de arestas é inteiro, logo tal soma tem que ser par. Se houvesse um número ímpar de vértices de grau ímpar tal soma seria ímpar, o que é impossível. Logo tal número é par.

2. Não. Note que se um vértice tem grau 4, então ele se conecta por arestas a todos os outros vértices. Sendo assim, se os 4 primeiros vértices tem grau 4, cada um deles tem que estar conectado ao quinto, o que força o grau deste a ser 4 também, e não 2.

3. Se todos os cientistas se conhecerem, então quaisquer 4 podem se sentar na mesa, em quaisquer posições, e a condição será satisfeita. Caso contrário, basta mostrar que o grafo associado tem um ciclo de tamanho 4.

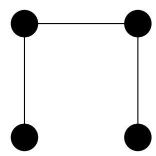
Considere dois cientistas que não se conheçam. No grafo, eles são representados por dois vértices, v_1 e v_2, que não estão conectados. Olhe para o conjunto formado pelos outros 48 vértices, $V \setminus \{v_1, v_2\}$. As arestas que estão conectadas a v_1 e v_2 são ao menos 50, pois o grau de cada um destes vértices é ao menos 25. Além disso, a outra extremidade de cada uma delas está no conjunto $V \setminus \{v_1, v_2\}$, pois v_1 e v_2 não estão conectados. Pelo princípio da casa dos pombos, ao menos $50 - 48 = 2$ destas extremidades coincidem, logo existem v_3 e v_4 tais que v_3 está conectado a v_1 e v_2, e v_4 está conectado a v_1 e v_2. Assim, obtemos o 4-ciclo v_1, v_3, v_2, v_4, concluindo a prova.

4. Não. Suponha que exista tal poliedro. Considere o grafo no qual os vértices representam as faces do poliedro e cada par de vértices esta conectado por uma aresta (do grafo!) se e somente se as faces do poliedro a eles correspondentes tem uma aresta (do poliedro!) em comum. Por exemplo, no caso do tetraedro, este grafo é o K_4, aquele que tem 4 vértices e todo par de vértices ligados por uma aresta.

Voltando ao nosso problema, nosso grafo teria um número ímpar de vértices e cada um deles teria grau ímpar, porque cada face tem um número ímpar de lados e cada um deles corresponde a uma aresta (do poliedro) em comum com outra face. Mas sabemos que a soma dos graus dos vértices em todo grafo é duas vezes o número de arestas. Portanto o resultado deveria ser par, contradição.

5. Este problema fica mais fácil de resolver se pensamos em casos pequenos.

Note que se $n = 1$, existe apenas um grafo com dois vértices de graus 1: aquele no qual eles estão conectados por uma aresta. Por outro lado, quando $n = 2$, o único grafo que funciona é este ao lado.



Para valores gerais de n usaremos indução, construindo um grafo G_{n+1} cujos vértices tem graus $1, 1, 2, 2, \ldots, n+1, n+1$ a partir de um grafo G_n cujos vértices tem graus $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$. Analisemos dois casos.

Suponha que $n = 2m$ é par. Adicione a G_n dois vértices a e b. Separe os vértices de grau maior ou igual a $m+1$ em dois conjuntos A e B, de maneira que, para cada i entre $m+1$ e $n = 2m$, cada um deles contenha exatamente um vértice de grau i. Agora, conecte a por arestas a cada um dos vértices de A e conecte b por arestas a cada um dos vértices de B. Neste novo grafo, os graus dos vértices são

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ \ldots,\ m,\ m,\ m,\ m,\ m+2,\ m+2,\ \ldots,\ n+1,\ n+1,$$

já que os primeiros, até o primeiro par m, m, representam vértices do grafo que não foram conectados a mais ninguém; o segundo par m, m representa os vértices a e b; e dali em diante temos os vértices do conjuntos A e B, cujos graus foram aumentados em 1. Para obter o grafo G_{n+1}, basta conectar os vértices a e b, concluindo a construção neste caso.

Por outro lado, se $n = 2m + 1$ é ímpar, a mesma ideia funciona. Basta fazer a primeira parte da construção acima. Note que neste caso não é necessário conectar os vértices a e b, pois já obtemos na primeira parte um novo grafo, cujos vértices tem graus

$$1,\, 1,\, 2,\, 2,\, \ldots,\, m,\, m,\, m+1,\, m+1,\, m+2,\, m+2,\, \ldots,\, n+1,\, n+1.$$

6. Iremos provar por indução no número n de cidades. Para $n = 1$ o problema é trivial. suponha então que o resultado seja válido para algum valor de n.

Dado um país com $n+1$ cidades, isolamos uma das cidades, que iremos chamar de C e consideramos o país formado pelas outras cidades e as estradas que as conectam entre si. Pela hipótese de indução, existe uma cidade C' a partir da qual podemos chegar em qualquer outra cidade do novo país.

Olhe agora para o país original e, em particular, para a estrada que conecta C a C'. Se o sentido dela vai de C' para C, então C' é uma cidade a partir da qual podemos viajar para qualquer uma das outras n cidades do país original. Caso contrário, podemos ir de C até C' e daí, de C' até qualquer outra cidade do país, portanto C é uma cidade com a propriedade buscada. Em ambos os casos provamos que tal cidade existe, concluindo a demonstração.

7. a) Seja G um grafo tal que todo vértice tem grau pelo menos 2. Comece em v_1 e tome v_2 conectado a v_1. Como $d(v_2) \geq 2$ existe v_3 diferente de v_1 tal que v_3 está conectado a v_2. Analogamente, existe v_4 conectado a v_3 diferente de v_2. Continue este procedimento criando uma lista de vértices v_1, v_2, ... v_k, ... de maneira que cada um está conectado ao seu sucessor e $v_i \neq v_{i+2}$ para todo $i \geq 1$. Como o número de vértices é finito, em algum momento algum vértice tem que repetir. Considere assim a primeira repetição v_a. A sequência a partir dele é v_a, v_{a+1}, v_{a+2}, ..., $v_k = v_a$, formando assim um ciclo.

b) Note que como o grafo é conexo, todo vértice tem grau pelo menos 1 (como existe uma aresta, ele tem ao menos dois vértices). Se não há vértice de grau 1, então todos tem grau pelo menos 2. Isto implica que há um ciclo, uma contradição.

c) A prova é por indução. Se a árvore tem dois vértices, necessariamente a aresta entre eles também faz parte do grafo. Já temos o caso base. Tome agora uma árvore com $n+1$ vértices. Pela letra anterior, existe algum vértice v de grau 1 no grafo. Excluindo-o do grafo, assim como a aresta a ele conectada, obtemos um novo grafo com n vértices que ainda é uma árvore (Note que ele ainda é conexo, pois qualquer caminho ligando dois pontos neste grafo não precisava passar por v no grafo original). Pela hipótese de indução, ele tem $n-1$ arestas e portanto o original tinha n arestas, concluindo a prova.

d) Não. Toda árvore de n vértices tem $n-1$ arestas. Porém não vale a volta. De fato, o grafo abaixo tem 4 arestas e 5 vértices, mas não é conexo.

PS: Observe que se um grafo com n vértices e $n-1$ arestas não é uma árvore, então ele contém um ciclo. Veja o próximo item.

e) Considere as componentes conexas do grafo $G_1, \dots, G_k$. Suponha que cada uma delas tem v_k vértices e que $v_1 + \cdots + v_k = n$. Se nenhuma delas tiver um ciclo, são todas árvores e portanto tem $v_k - 1$ arestas. Segue que o grafo todo tem no total $n - k$ arestas, o que não é o caso se ele tem mais que $n - 1$ arestas.

8. Considere a componente conexa do grafo associado que contém a capital. Se Longíssima não estiver nesta componente conexa, ela é constituída pela capital, um vértice de grau 21, e por outras cidades, cada um dela um vértice de grau 20. Segue que esta componente conexa é um grafo cuja soma dos graus dos vértices é ímpar, um absurdo. Logo Longíssima tem que pertencer a esta componente conexa.

9. A ideia é ir removendo arestas do grafo até restar uma árvore. Esta árvore será uma *árvore geradora*. Se o grafo original for uma árvore, então pronto, não precisamos de mais nada. Se não for uma árvore, então ele tem um ciclo $v_1, v_2, , \dots, v_k, v_1$. Retire então do grafo a aresta $v_k v_1$. O grafo que resta ainda é conexo. De fato, dados dois vértices v e v' se o caminho que os liga no grafo original não passar pela aresta $v_k v_1$ então eles continuam conectados. Por outro lado, se passar, podemos trocá-la pelo caminho $v_1, v_2, , \dots, v_k$ que ainda permanece no grafo e então os dois vértices ainda são conectados. Note que o número de ciclos do grafo diminui em ao menos 1. Talvez o grafo resultante ainda tenha algum ciclo. Neste caso repetimos o procedimento até que ele fique sem ciclos. Como o número de ciclos no grafo original é finito, em algum momento estas repetições param. O grafo que sobre é conexo e sem ciclos, e portanto é uma árvore.

10. Considere o grafo associado. A condição do enunciado implica que 100 cidades tem que sair da capital, com mão única apontando para fora desta. Com efeito, em um grafo orientado, a soma dos graus de chegada dos vértices tem que ser igual a soma do grau de saída dos vértices. Segue que

$$100 \times 20 + d_{\text{saída}}(\text{capital}) = 100 \times 21 + d_{\text{chegada}}(\text{capital}) \implies d_{\text{saída}}(\text{capital}) - d_{\text{chegada}}(\text{capital}) = 100.$$

Contudo, os graus de chegada e saída da capital são números inteiros entre 0 e 100, logo $d_{\text{saída}}(\text{capital}) = 100$ e $d_{\text{chegada}}(\text{capital}) = 0$. Como todas as estradas conectadas à capital apontam para fora desta, não é possível alcançá-la sem viajar na contramão.

11. Considere um reino com n cidades tal que pode se ir de uma a outra por voos. Provaremos que se $n \geq 3$ é possível fazer o trajeto em $2n - 4$ voos. Usaremos indução. Para $n = 3$, o grafo associado é conexo e portanto tem que conter algum vértice de grau 2. Percorrendo o "V" determinado por ele de ponta a ponta, percorremos todas as 3 cidades em dois voos, e a base está completa.

Seja agora um reino com $n + 1$ cidades. Pelo exercício 9, o grafo associado é conexo e tem uma árvore geradora. Mostremos que todos os vértices podem ser visitados por um caminho que percorre $2n - 2$ arestas todas elas dentro desta árvore geradora. Pelo exercício 7, esta árvore tem uma folha, um vértice v de grau 1. Seja v' o vértice adjacente a v. Excluindo v e a aresta vv' do grafo obtemos um grafo com n vértices que **também é conexo**. Pela hipótese de indução, existe caminho que passa por todas as n cidades percorrendo $2n - 4$ arestas. Para construir o caminho na árvore original, basta tomar este caminho e, no momento em que ele passasse pela primeira vez por v' adicionar o desvio v', v, v', percorrendo duas vezes a aresta $v'v$.

12. A ideia aqui é usar um algoritmo para construir a coloração. Inicialmente, tome o vértice v de grau máximo do grafo; se houver mais que um, escolha qualquer um. Se seu grau $d(v)$ for igual a δ, colora este vértice com a cor C_1 e os vértices a ele ligados com as cores C_2, C_3, ..., $C_{\delta+1}$. Observe que este subgrafo determinado pelos $\delta+1$ vértices já pintados e as arestas que os ligam satisfaz a condição que dois vértices adjacentes não tem a mesma cor.

O procedimento que o algoritmo irá repetir várias funciona da seguinte maneira. Dado um subconjunto V' de vértices do grafo G (que não contenha todos os vértices de G) colorido usando as cores $C_1, \ldots, C_{\delta+1}$ de forma que quaisquer dois vértices v_1 e v_2 em V' adjacentes (por arestas de G) estão pintados de cores diferentes, escolheremos um vértice v de G fora do subconjunto V' e o pintaremos de uma cor C_i de forma que no conjunto $V' \cup \{v\}$ quaisquer dois vértices v_1 e v_2 adjacentes (por arestas de G) estarão pintados de cores diferentes.

De fato, dado o subconjunto V', tome v qualquer vértice fora de V'. Sejam $v_1', v_2', \ldots, v_k'$ os vértices de V' conectados a v. Como o grau de v é menor ou igual a δ, $k \leq \delta$ e estes vértices estão pintados em no máximo δ cores distintas. Sendo assim, existe uma cor C_i, para algum valor de $i = 1, 2, \ldots, \delta+1$ que ainda não foi utilizada e então colorimos v com esta cor. No conjunto $V' \cup \{v\}$ não existem dois vértices adjacentes pintados da mesma cor, pois já não existia em V' e todo vértice adjacente a v está pintado de uma cor diferente de C_i. Isto mostra que o procedimento pode ser executado se as condições forem satisfeitas.

Agora voltemos ao início de nossa solução. Se o conjunto de $\delta+1$ vértices do primeiro parágrafo constituir todos os vértices de G, não precisamos fazer mais nada, pois já colorimos todos os vértices. Caso contrário, aplique o procedimento acima considerando V' como sendo o conjunto dos $\delta+1$ vértices. Note que ele satisfaz ambas as condições necessárias: não há vizinhos da mesma cor e não são todos os vértices de G. Após o procedimento, ficamos com um conjunto de $\delta+2$ vértices sem que haja dois adjacentes da mesma cor. Caso estes sejam todos os vértices de G, paramos aqui e teremos concluído nossa tarefa. Caso contrário, o novo conjunto satisfaz as condições para aplicarmos o procedimento e o aplicamos mais uma vez. Repetimos essa rotina até que não seja mais possível executá-la, ou seja, quando tivermos pintado todos os vértices do grafo. Note que como o número de vértices é finito e a cada etapa aumentamos em 1 o número de vértices pintados, a repetição em algum momento deve terminar, e assim teremos conseguido a coloração buscada.

13. Escolha um cientista C qualquer. Suponha que qualquer um dos outros consegue conversar com C. Então cada um deles tem que falar uma das três línguas faladas por C. Como são oito cientistas, pelo Princípio da casa dos Pombos, uma das três línguas faladas por C é falada por ao menos 3 deles e portanto existe 4 cientistas (incluindo C) que falam a mesma língua e podem conversar entre si.

Caso contrário, existe cientista C' que não fala nenhuma língua em comum com C. Considere os outros 7 cientistas e os enumere C_1, C_2, ..., C_7. Considerando todos os trios do tipo C, C', C_i, com $i = 1, \ldots, 7$, verificamos que cada C_i tem que conhecer uma língua em comum com C ou uma língua em comum com C'. Sem perda de generalidade, pelo PCP. podemos supor que existem 4 valores de i, C_1, C_2, C_3 e C_4 que falam alguma língua em comum com C. Como C só fala 3 línguas, dois deles tem que falar uma língua em comum com C, sem perda de generalidade C_1 e C_2. Segue que C, C_1 e C_2 forma um trio que pode conversar entre si.

14. Note que o grafo associado com 1001 vértices tem cada par de vértices conectado por uma aresta que vai de um ao outro em algum sentido. Seja G um subgrafo de 668 vértices. Escolha um vértice v de G e seja A o conjunto dos vértices de G que podem ser alcançados a partir de v por caminhos que nunca saem de G (incluindo v) e B o seu complementar em G. Observe que dado um vértice a em A e um vértice b em B, a aresta que liga a e b aponta para a, caso contrário b também seria alcançável a partir de v.

Seja K o número de vértices em A. Considerando o subgrafo formado apenas pelos vértices em A, como todas as arestas possíveis estão desenhadas em algum sentido,

$$\sum_{v' \in A} d_{\text{saída}}(v') = \sum_{v' \in A} d_{\text{entrada}}(v') = \binom{K}{2},$$

e portanto, pelo PCP, existe algum vértice em a em A cujo grau de entrada é ao menos $(K-1)/2$. Pela argumentação do parágrafo anterior e o fato que B tem $668 - K$ elementos, segue que $d_{\text{entrada}}(a) \geq (K-1)/2 + 668 - K = (1335 - K)/2$. Contudo, $d_{\text{entrada}}(a) \leq 500$ pela condição do enunciado, de onde segue que $K \geq 335$.

Mostrar que é conexo agora é simples. Dados dois vértices v_1 e v_2, o conjunto A_1 dos vértices alcançáveis sem sair de G a partir de v_1 tem ao menos 335 vértices de G. Analogamente, o conjunto A_2 dos vértices em G a partir dos quais pode se alcançar v_2 por caminhos que nunca saem de G tem ao menos 335 elementos (basta inverter a ordem de todas as flechas do grafo original para ver isto). Como G tem 668 elementos, A_1 e A_2 se intersectam em algum v_3, logo é possível ir de v_1 a v_3 sem sair de G e depois de v_3 a v_2 sem sair de G. Segue que existe caminho de v_1 a v_2 e como estes foram escolhidos arbitrariamente, a demonstração está completa.

15. Considere o grafo cujos vértices são os membros do clube e cujas arestas são as partidas disputadas. Se algum duelo foi disputado mais de uma vez, desenhe apenas uma aresta para representá-lo. Este grafo tem 20 vértices e no máximo 14 arestas. Observe que todo grafo conexo com n vértices tem ao menos $n-1$ arestas (veja o exercício 7). Considere as componentes conexas G_1, G_2, ..., G_k, cada uma delas com v_k vértices. Segue que $v_1 + v_2 + \cdots + v_k = 20$ e o número de arestas é ao menos $v_1 - 1 + v_2 - 2 + \cdots v_k - 1 = 20 - k$. Como o grafo tem no máximo 14 arestas, segue que $k \geq 6$. Como cada jogador disputou pelo menos uma partida, segue que cada componente conexa tem ao menos 2 vértices. Escolha assim seis componentes conexas e em cada uma delas um par de vértices conectados por uma aresta. Este doze vértices representam os doze jogadores buscados.

16. Dado um subconjunto $U \subset V$ do conjunto de vértices denotamos por $d_U(v)$ o número de vizinhos que v tem em U. Precisamos encontrar uma partição $V = A \cup B$ tal que $d_A(v) - d_B(v) \leq 0$ para todo $v \in A$ e $d_B(v) - d_A(v) \leq 0$ para todo $v \in B$. Dada uma partição qualquer $V = A \cup B$, considere a função

$$f(A, B) = \sum_{v \in A} d_A(v) - d_B(v) + \sum_{v \in B} d_B(v) - d_A(v).$$

Não é muito difícil acreditar que a partição que minimiza o valor de tal função satisfaz a condição que queremos. Note em primeiro lugar que tal mínimo existe, pois existe apenas um número finito ($2^{|V|}$) de partições distintas. Mostremos que ela de fato funciona.

Com efeito, considere (A, B) minimal e suponha que ela não funciona. Dessa forma, podemos supor sem perda de generalidade que existe $a \in A$ tal que $d_A(a) > d_B(a)$ (devido a simetria). Analisemos então o que acontece quando movemos a para o conjunto B, ou seja, qual é o valor de f para a partição $A' \cup B' = V$ tal que $A' = A \setminus \{a\}$ e $B' = B \cup \{a\}$.

Seja $v \neq a$ um elemento de V. Note que

$$\begin{cases} d_{A'}(v) = d_A(v) \quad \text{e} \quad d_{B'}(v) = d_B(v), & \text{quando } v \text{ não é conectado a } a; \\ d_{A'}(v) = d_A(v) - 1 \ \text{ e } \ d_{B'}(v) = d_B(v) + 1, & \text{quando } v \text{ é conectado a } a. \end{cases}$$

Além disso, estes valores não mudam quando consideramos $v = a$, porém a sai de A para B. Juntando tudo e denotando por $v \sim a$ a propriedade de um vértice estar conectado ao vértice a, obtemos,

$$\begin{aligned} f(A', B') - f(A, B) &= \\ &= \left(\sum_{v \in A'} d_{A'}(v) - d_{B'}(v) + \sum_{v \in B'} d_{B'}(v) - d_{A'}(v) \right) - \left(\sum_{v \in A} d_A(v) - d_B(v) + \sum_{v \in B} d_B(v) - d_A(v) \right) \\ &= \sum_{v \in A', v \sim a} -2 + \sum_{v \in B, v \sim a} 2 + d_B(a) - d_A(a) - d_A(a) + d_B(a) = 4(d_B(a) - d_A(a)) < 0, \end{aligned}$$

contrariando a minimalidade de (A, B). Assim, não pode existir $a \in A$ tal que $d_A(a) > d_B(a)$, e portanto (A, B) satisfaz a condição exigida.

Para a segunda parte, tome a partição (A, B) acima. Algum dos conjuntos tem que ter cardinalidade menor ou igual a $n/2$. Suponha sem perda de generalidade que seja A. Como G não tem vértices isolados, $d(v) \geq 1$ para todo $v \in B$. Porém, como $d_A(v) \geq d_B(v)$ para todo $v \in B$, segue que $d_A(v) \geq 1$ para todo $v \in B$. Concluímos que A é dominante.

PS: Poderíamos tomar também f sendo a função que mede o número de arestas entre A e B e considerar seu máximo.

17. Considere um grafo bipartido no qual do lado esquerdo temos n vértices, representando as n linhas e no lado direito temos n vértices, representando as n colunas. Os $2n$ pontos marcados representam as $2n$ arestas deste grafo: se um ponto está na linha i coluna j ele é representado pela aresta que liga o vértice i do lado esquerdo com o vértice j do lado direito. Como este grafo tem $2n$ vértices e $2n$ arestas, ele tem que possuir um ciclo (veja exercício 7). Como o grafo é bipartido, este ciclo tem que alternar entre o lado esquerdo e o lado direito, tendo portanto tamanho par. Sejam $e_1, e_2, \ldots, e_{2k}$ as arestas deste ciclo em ordem, supondo sem perda de generalidade que o vértice em comum entre e_1 e e_2 está do lado esquerdo. Considere então os pontos $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ marcados no reticulado, sendo a_i o ponto associado a aresta e_i para cada i de 1 até $2k$. Segue daí que a_1 e a_2 estão na mesma linha. Por outro lado, a_2 e a_3 estão na mesma coluna, pois e_2 e e_3 tem vértice em comum do lado direito. Este padrão segue alternando até que chegamos em a_{2k} que tem que estar na mesma coluna que a_1 pois e_1 e e_{2k} tem vértice em comum do lado direito.

18. Cada jogador disputou um total de 13 partidas. Existe portanto algum jogador que venceu ao menos 7 partidas. Com efeito, num grafo orientado G,

$$\sum_{v \in G} d_{\text{saída}}(v) = \binom{|V|}{2} = \sum_{v \in G} d_{\text{entrada}}(v). \tag{1}$$

e então, se cada jogador venceu no máximo 6 jogos, cada um deles perdeu no mínimo 7, e o lado esquerdo é menor ou igual a 6×14 enquanto o lado direito é maior ou igual a 7×14, uma contradição. Separe este jogador J_1 e sejam $J_8, J_9, \ldots, J_{14}$ sete jogadores por ele vencidos. Considere os outros seis, $J_2, \ldots, J_7$. Provaremos que no sub-torneio disputado apenas entre eles, existe algum par de jogadores J_a e J_b que, juntos, venceram os outros 4. Juntando-os a J_1 encontramos os 3 jogadores que venceram todos os outros.

Note que se alguém tiver vencido 4 vezes neste sub-torneio o problema termina, basta juntar este cara a J_1 e mais algum outro jogador fora do conjunto dos 11 vencidos pelo par formado por este cara e J_1. Por outro lado, se o número máximo de vitórias de cada jogador é 3, seja k o número de jogadores que atingiu este número de vitórias. Segue daí, pela equação (1), que $3k + 2(6 - k) \geq \binom{6}{2} \implies k \geq 15 - 12 = 3$.

Suponha sem perda de generalidade que os jogadores J_2, J_3 e J_4 venceram exatamente 3 vezes. Suponha que algum destes perdeu para os outros dois. Sem perda de generalidade, podemos supor que J_2 perdeu para J_3 e J_4, logo venceu J_5, J_6 e J_7. Supondo sem perda de generalidade que J_3 venceu J_4 podemos então escolher J_1, J_2 e J_3 como nosso trio.

Por outro lado, se cada um deles venceu outro e perdeu para outro, suponha sem perda de generalidade que J_2 venceu J_3 que venceu J_4 que venceu J_2 e que J_2 venceu J_5 e J_6. Se J_4 venceu J_7, basta tomar J_2 e J_4. Caso contrário, J_4 também venceu J_5 e J_6. Se J_3 venceu J_7, bastaria escolher J_3 e J_4. Se isto também não acontecer, J_7 venceu J_3 e J_4, portanto basta escolher J_2 e J_7. Isto conclui a análise de possibilidades e o problema.

19. Iremos contar o número de "chifres" do grafo. Um chifre nada mais é que um par de arestas

e_1 e e_2 com um vértice em comum. Note que cada chifre tem um único vértice em comum e cada vértice i de grau d_i determina $\binom{d_i}{2} = (d_i^2 - d_i)/2$ chifres. Como o grafo tem 2013 arestas, sabemos que $\sum_{i=1}^{500} d_i = 4026$. Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz[3],

$$\left(\sum_{i=1}^{500} d_i^2\right) \cdot \sum_{i=1}^{500} 1 \geq \left(\sum_{i=1}^{500} d_i\right)^2.$$

Somando sobre todos os i, descobrimos que o número de chifres do grafo é ao menos $4026^2/1000 - 2013$.

Por outro lado, cada chifre tem duas pontas. Além disso, as duas pontas do chifre são quase vizinhas. Note que dois chifres distintos não podem ter o mesmo par de pontas, pois se isso acontecesse existiria um ciclo $ABCD$ como no enunciado em Semciclolândia. Sendo assim, basta mostrar então que existe alguma ponta que pertence a pelo menos 57 chifres.

Em contrapartida, pelo PCP, existe algum vértice que é ponta de pelo menos

$$\left\lceil 2\left(\frac{4026^2}{1000} - 2013\right)/500 \right\rceil = 57$$

chifres, concluindo a prova.

20. A resposta é 191. Podemos construir $\binom{20}{2} = 190$ estradas sem tornar o país conexo, basta separar 20 cidades e construir todas as estradas possíveis entre elas. Mostremos que com 191 estradas o país se torna conexo.

Suponha que o rei construiu várias estradas de modo que o país ainda seja desconexo. Isto significa que ele está dividido em várias componentes conexas. Podemos agrupá-las em dois conjuntos A e B, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$ cidades respectivamente, de maneira que não exista estrada entre qualquer par de cidades $a \in A$ e $b \in B$. Dessa maneira, existem no máximo

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} = \frac{a^2 + b^2 - (a+b)}{2}$$

estradas construídas. Note porém que $a + b = 21$, logo $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 21^2 - 2ab$. O menor valor possível de ab com $a + b = 21$ acontece quando a e b estão o mais distantes possível, e no nosso caso é 20, já que $a \geq 1$. Concluímos que o número de estradas construídas é no máximo $(21^2 - 40 - 21)/2 = 190$ e portanto com 191 estradas o país tem que ser conexo.

21. Considere uma maneira arbitrária de pavimentar as estradas. Chamemos uma cidade de *par* quando o número de estradas pavimentadas saindo delas for par. Considerando o grafo cujos vértices são as cidades e as estradas pavimentadas as arestas, observamos que o número de cidades com grau ímpar é par (veja exercício 1). Como 1000 é par, o número de cidades *pares* também tem que ser par. Nosso objetivo é encontrar uma maneira de pavimentar as estradas de forma que este número se torne igual a zero.

Para tanto iremos usar um algoritmo. Começamos de uma pavimentação qualquer e enquanto o número de cidades *pares* for positivo faremos o seguinte. Escolha uma cidade par c_1 qualquer. Note que ela existe pela hipótese do número de cidades pares ser positivo. Com certeza existe outra cidade par c_2, pois o número de cidades pares não é ímpar. Escolha agora um caminho qualquer envolvendo estradas de terra e estradas pavimentadas ligando c_1 a c_2. Após isso, faça a seguinte operação:

- se uma estrada neste caminho é de terra, pavimente-a;
- se uma estrada neste caminho é pavimentada, torne-a de terra.

[3] ou das médias, aplicadas várias vezes.

Seja c uma cidade neste caminho que não é c_1 nem c_2. Observe que a paridade do número de estradas pavimentadas a ela conectadas não muda após o procedimento. Para ver isso, basta analisar os casos possíveis: Pavimentada - c - Pavimentada; Terra - c - Terra; Pavimentada - c - Terra. Por outro lado, ambas cidades c_1 e c_2 deixam de ser pares após o procedimento. Evidentemente, nada muda nas cidades fora do caminho.

Concluímos que o procedimento diminui o número de cidades pares em 2. Como existe um número finito de cidades, independentemente da pavimentação original, após um número finito de aplicações do procedimento o número de cidades pares se torna 0, concluindo a solução.

22. Se dois vértices v e u estão ligados por uma aresta iremos denotá-los por $v \sim u$.

a) Sejam $x_1, \ldots, x_k$ os vértices conectados a x e $y_1, \ldots, y_l$ os vértices conectados a y. Queremos mostrar que $l = k$. Note que para cada $i = 1, \ldots, l$, existe exatamente um vértice v tal que $v \sim x$ e $v \sim y_i$. Como $v \sim x$, v tem que ser igual a x_j para algum valor de j entre 1 e k. Mais ainda, se para dois valores y_{j_1} e y_{j_2} algum x_i fosse tal que $x_i \sim y_{j_1}$ e $x_i \sim y_{j_2}$, teríamos uma contradição, já que $y \sim y_{j_1}$ e $y \sim y_{j_2}$ e, como $y \neq x_i$ por causa da condição de y e x não serem conectados, os vértices y_{j_1} e y_{j_2} teriam dois amigos em comum. Segue então que $l \leq k$. Repetindo a mesma argumentação trocando os papéis de x e y obtemos $k \leq l$, de onde segue que $k = l$.

b) Sejam x e y dois vértices não conectados do grafo (existem pois x tem grau menor que $n-1$). Pela letra a) ambos tem grau $k \geq 1$. Como eles em apenas um amigo em comum z, todos os outros vértices do grafo ou não estão conectados a x ou não estão conectados a y e portanto tem grau igual a k. Resta provar que z também tem grau k. Observe porém que ele não está conectado a algum dos outros vértices do grafo, pois tem grau menor que $n-1$, e assim, novamente pela letra a), tem grau k.

23. Considere o grafo associado. Queremos que cada conjunto de 4 vértices seja conexo. Note que nenhum vértice v pode ter grau menor que 22, pois neste caso existiram 3 vértices u, w, z ao qual ele não estaria conectado e então o conjunto v, u, w, z não seria conexo. Mostremos que existe um grafo que satisfaz a condição tal que todo vértice tem grau 22.

Considere os 25 vértices como sendo os vértices de um polígono regular de 25 lados. Conecte-os entre si por arestas de forma que nenhum lado do polígono seja desenhado, ou seja, ligue cada vértice a todos os outros excetuando-se os seus vizinhos no polígono. Considere agora um conjunto de 4 vértices. Pelo Teorema de Dirac, se cada vértice do subgrafo induzido por estes 4 vértices tem grau ao menos 2, então ele é conexo. Só teríamos problemas então quando algum vértice tivesse grau 1 (note que nenhum pode ter grau 0 pois pelo menos um dos outros 3 vértices não é seu vizinho no polígono). Neste caso, escolhemos um vértice, seus dois vizinhos no polígono e mais algum outro vértice. Se este último não é vizinho no polígono de nenhum dos 3 anteriores então ele está conectado aos 3 e o grafo é forçosamente conexo. Caso contrário, necessariamente escolhemos 4 vértices consecutivos no grafo. Mas neste caso, o grafo formado é isomorfo ao grafo desenhado na solução do problema 6, que é conexo.

Segue então que este grafo satisfaz a condição do enunciado. Como cada vértice tem o grau mínimo possível o número mínimo de arestas (cabos) é $22 \times 25/2 = 275$.

24. Considere o grafo bipartido cujos 20 vértices na esquerda são os problemas de matemática e os 11 vértices na direita são os problemas de física. Cada aresta corresponde a escolha do par de problemas feita por algum estudante. O enunciado implica que dada uma aresta, um dos dois vértices que a define tem grau no máximo 2. Queremos encontrar o número máximo de arestas em um grafo com estas propriedades. Afirmamos que tal número é 54.

Com efeito, existe um grafo como acima que tem 54 arestas. Considere os primeiros 18 vértices do lado esquerdo conectados aos 2 primeiros do lado direito. Os outros 2 vértices do lado esquerdo serão todos eles conectados aos demais 9 vértices do lado direito. Claramente cada aresta contém um vértice de grau 2 e o grau total do lado esquerdo, que é igual ao número de arestas, é 54.

Em contrapartida, considere um grafo qualquer com as propriedades acima. Seja A_1 o conjunto dos vértices do lado esquerdo que tem grau no máximo 2 e A_2 o conjunto dos vértices do lado esquerdo que tem grau maior que 2. Seja também B_1 o conjunto dos vértices do lado direito que tem grau no máximo 2 e B_2 o conjunto dos vértices do lado direito que tem grau maior que 2.

Pela condição do enunciado, não podem existir arestas entre B_1 e B_2. Em particular A_1 ou A_2 é não vazio. Mais ainda, qualquer aresta entre A_1 e A_2 pode ser substituída por uma aresta entre A_1 e B_2 sem criar nenhum problema, mudando apenas seu fim do lado direito. Logo podemos supor que não existem arestas entre A_1 e A_2. Segue então que o número de arestas no grafo é igual a soma dos graus dos vértices em $A_1 \cup A_2$.

Além disso, seja b_1 a cardinalidade de B_1 e b_2 a de B_2. Se $b_1 \leq 1$, todo vértice em A_2 tem grau no máximo 1 e se $b_2 \leq 1$ todo vértice em A_1 tem grau no máximo 1. Segue que

$$\sum_{v \in A_1} d(v) \leq \begin{cases} 2 \cdot |A_1| = 40 - 2b_1, & \text{quando } b_2 \geq 2 \\ |A_1| = 20 - b_1, & \text{quando } b_2 \leq 1. \end{cases}$$

A versão análoga vale para A_2. Analisando casos para os possíveis valores de b_1 e b_2 notamos que o maior valor das estimativas acima ocorre quando $b_1 = b_2 = 2$ e neste caso obtemos a quota $40 - 2b_1 + 22 - 2b_2 = 62 - 8 = 54$, concluindo a prova.

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo