Problemas Resolvidos

Nível 2

Princípio da Casa dos Pombos

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problemas

Problema 1. Cinquenta e um pontos são postos no interior de um quadrado de lado 1 metro. Prove que existe um conjunto de três desses pontos que podem ser cobertos por um quadrado de lado 20 centímetros.

Problema 2. Prove que em um conjunto de cinco inteiros quaisquer, sempre há três cuja soma é divisível por 3.

Problema 3. Mostre que em um subconjunto de 51 elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ sempre existem dois cuja a diferença é 10.

Problema 4. Prove que existe uma potência de 3 terminada nos dígitos 001 (na base decimal).

Problema 5. Prove que todo número natural possui um múltiplo positivo que se escreve apenas com os algarismos 0 e 1 na base decimal.

Problema 6 (Longlist IMO 1977 - Romênia)**.** Dados 37 pontos no espaço com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos triângulos formado por três destes pontos possui o baricentro com coordenadas inteiras.

Problema 7. O plano é pintado usando duas cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Problema 8 (Putnam)**.** O plano é pintado usando três cores. Prove que existem dois pontos da mesma cor distando exatamente um metro.

Soluções

1. Divida o quadrado em 25 quadrados menores de lado 20 centímetros. Observe que se há 25 casas para 51 pombos, pelo menos uma casa terá no mínimo 3 pombos. Aqui estamos usando uma versão generalizada do Princípio da Casa dos Pombos: "Se há n casas para $nk+1$ pombos, ao menos uma casa terá mais que k pombos."

2. Os possíveis restos na divisão por 3 são 0, 1 e 2. Vamos dividir em casos:
Caso 1. Os três possíveis restos aparecem: Nesse caso, basta tomar um número com cada resto e somá-los, pois 0+1+2=3.
Caso 2. Algum dos restos não aparece: Nesses caso, como há 5 números e só dois possíveis restos, algum dos restos deverá aparecer 3 vezes, ao menos. Basta então somar três números com o mesmo resto.

3. Considere os seguintes 50 subconjuntos de $\{1, \ldots, 100\}$:
$A_{k,i} = \{20k+i, 20k+i+10\}$, para $k = 0, 1, \ldots, 4$ e $i = 1, \ldots, 10$.
Tomando quaisquer 51 elementos de $\{1, \ldots, 100\}$, algum dos conjuntos acima deve conter pelo menos 2 desses elementos.

4. Considere a sequência $3^1, 3^2, 3^3, \ldots$, das potências de 3. Os possíveis restos na divisão por 1000 formam um conjunto finito (com 1000 elementos). Portanto, pelo PCP, devem existir $j < k$ tais que as potências 3^j e 3^k deixam o mesmo resto na divisão por 1000. Assim, $3^k - 3^j \equiv 0 \pmod{1000}$. Donde segue que $3^j(3^{k-j} - 1) \equiv 0 \pmod{1000}$. Como $\text{mdc}(3, 1000) = 1$, podemos concluir então que $3^{k-j} - 1 \equiv 0 \pmod{1000}$. E daí $3^{k-j} \equiv 1$. Portanto, 3^{k-j} termina em 001.

5. Seja n um número natural qualquer. Os possíveis restos na divisão por n formam um conjunto finito com n elementos, $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ Considere a sequência $1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots$. Como essa lista é infinita deve existir um resto na divisão por n que se repete. Isto é, existe algum $r \in \{0, \ldots, n-1\}$ e inteiros $i < j$ tais que o número A formado por j algarismos 1 e o número B formado por i algarismos 1 deixam o mesmo resto r na divisão por n. A diferença $A - B$ é então um múltiplo de n formado por $j - i$ algarismos 1 seguidos de i algarismos 0.

6. Sejam $P_k = (x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, \ldots, 37$ os pontos. O baricentro do triângulo $P_iP_jP_k$ é o ponto

$$\left(\frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \frac{y_i + y_j + y_k}{3}, \frac{z_i + z_j + z_k}{3}\right).$$

Então, precisamos mostrar que existem 3 pontos P_i, P_j, P_k tais que as somas $x_i + x_j + x_k$, $y_i + y_j + y_k$ e $z_i + z_j + z_k$ sejam múltiplos de 3. Vamos aplicar o PCP por etapas. Olhemos primeiro para a primeira coordenada. Há 3 restos possíveis na divisão por 3. Como $37 = 3 \times 12 + 1$, podemos obter um conjunto com 13 pontos tais que em todos a primeira coordenada deixa o mesmo resto na divisão por 3. Sem perda de generalidade, renomeando os pontos, podemos supor que esses pontos são $P_1, \ldots, P_{13}$. Agora olhemos para a segunda coordenada. Como $13 = 3 \times 4 + 1$ podemos obter um conjunto de 5 pontos, tais que em todos a segunda coordenada também deixa um mesmo resto na divisão por 3. Sem perda de generalidade, suponha que os pontos sejam $P_1, \ldots, P_5$. Ao tomarmos quaisquer 3 desses pontos, as duas primeiras coordenadas do baricentro serão inteiras. Falta analisar a terceira coordenada. Para isso basta usar o resultado do Problema 2 desta lista: dados 5 inteiros sempre podemos achar 3 cuja soma é divisível por 3.

7. Desenhe no plano um triângulo equilátero de lado 1 metro. Como só há duas cores, haverá dois vértices do triângulo com a mesma cor.

8. Suponha, para gerar um absurdo, que seja possível pintar o plano com 3 cores de modo que pontos a uma distância de $1m$ sempre tenha cores diferentes. Considere o losango que é formado quando se unem dois triângulos equiláteros de lado $1m$, de modo que eles compartilhem um lado. Os lados desse losango medem $1m$, uma das diagonais mede $1m$ e a outra diagonal mede $\sqrt{3}m$. É fácil ver que os dois vértices mais afastados desse losango devem ser pintados com a mesma cor. Esse argumento mostra que nesse plano quaisquer dois pontos a uma distância de $\sqrt{3}m$ deve ter a mesma cor. Fixe agora um ponto do plano e considere a circunferência de raio $\sqrt{3}$ em torno desse ponto. Todos os pontos dessa circunferência devem ter a mesma cor. Como o diâmetro dessa circunferência é maior que 1 podemos tomar uma corda de comprimento 1. As duas extremidades dessa corda têm a mesma cor. Contradição.

Relacionado aos problemas anteriores, veja o Problema de Hadwiger-Nelson.

É possível pintar o plano usando 7 cores de modo que quaisquer dois pontos distando 1 metro entre si tenham cores diferentes. Para isso considere um ladrilhamento do plano usando hexágonos com diâmetro um pouco menor que 1.

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández