Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Curso de Aritmética - Nível 1

Prof. Emiliano Chagas

Múltiplos, Divisores e Primos II - Aula 07

Após a apresentação dos conceitos de divisor e múltiplo, é possível se perguntar se existem números que possuem o mesmo divisor ou o mesmo múltiplo. A ideia desse material é apresentar o conceito de máximo divisor comum (MDC) e mínimo múltiplo comum (MMC) entre dois ou mais números, além de apresentar problemas gerais de teoria dos números.

Vamos tomar dois números, 12 e 18, e pensar em um divisor simultâneo (comum) desses dois números. Uma ideia inicial é listar todos os divisores positivos desses dois números, nesse caso temos $d(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e $d(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ e temos alguns divisores comuns a esses dois números: $1, 2, 3, 6$. Portanto faz sentido perguntarmos qual é o máximo divisor comum (MDC) de dois ou mais números, e nesse caso o resultado é 6. Uma notação curta para MDC de 12 e 18 ser 6 é: $MDC(12, 18) = 6$. Perceba que esse processo de listarmos os divisores pode ser uma péssima ideia se o número for grande e possuir muitos divisores.

Nesse caso tomamos outro caminho, fazemos a fatoração em números primos dos números que gostaríamos de calcular o MDC. No exemplo anterior temos $12 = 2^2.3$ e $18 = 2.3^2$. O processo é simples, basta perguntar para cada fator primo, e com qual potência, ele divide simultanemamente os dois números. Veja que 2^1 divide simultanemanente 12 e 18, mas 2^2 só divide 12, portanto o MDC deve possuir o fator 2^1, o próximo fator primo é o 3^1, veja que ele divide 12 e 18, mas 3^2 só divide 18, portanto o MDC deve possuir o fator 3^1. Como acabamos, então $MDC(12, 18) = 2^1.3^1 = 6$.

Resumindo o processo: fazemos a fatoração em primos dos números que queremos calcular o MDC e pegamos aqueles fatores primos comuns com o menor expoente. Vale a pena mencionar que o MDC de dois ou mais números sempre existe e será pelo menos 1, se isso ocorrer dizemos que os números são primos entre si.

Para calcular o MMC entre dois ou mais números podemos tomar a mesma decisão de listar os múltiplos positivos desses números, mas como explicado anteriormente isso pode ser bem chato. Vamos calcular o MMC entre 42 e 45, pela notação, $MMC(42, 45)$. Primeiramente, perceba que estamos procurando um múltiplo simultâneo de 42 e 45, o que significa que esse múltiplo simultâneo na sua formação deve possuir um $42 = 2.3.7$ e um $45 = 3^2.5$. Lembrando que os múltiplos de 42 são $42.1, 42.2, 42.3, \ldots$ e os de 45 são $45.1, 45.2, 45.3, \ldots$.

Agora tomamos os fatores primos e suas potências. Devemos colocar 2^1 no $MMC(42, 45)$? Sim, 2 faz parte do 42, embora não faça parte do 45, o MMC deve possuir o número 42 e o

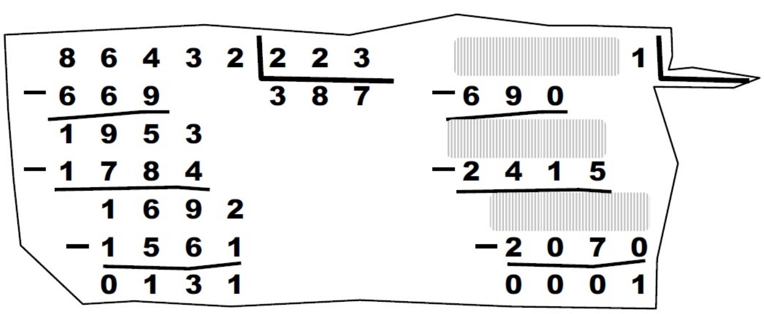
45 em sua formação. Devemos colocar 3^1 ou 3^2? Como o MMC deve possuir o número 42 e o 45 em sua formação, então pegamos o 3^2, que já garante o 3^1 do 42 e o 3^2 do 45. Note que poderíamos pegar um 3^3, mas nesse caso não estaríamos construíndo o mínimo múltiplo comum. Continuamos o processo de tomar os fatores primos com o maior expoente para obter $MMC(42, 45) = 2.3^2.5.7 = 630$.

Resumindo o processo: fazemos a fatoração em primos dos números que queremos calcular o MMC e pegamos aqueles fatores primos com o maior expoente. Vale a pena mencionar que o MMC de dois ou mais números sempre existe e será pelo menos o produto dos números, se eles não tiverem fatores em comum.

Em geral os problemas encontrados em olimpíadas de matemática exigem mais noções de MDC do que de MMC. Para calcular o MDC entre dois números grandes existe um método muito bom, e ele consiste de uma ideia simples. Vamos tomar o exemplo $MDC(12, 18) = 6$, perceba que $12 = 2.6$ e $18 = 3.6$, por esse motivo, se subtraírmos 12 de 18, ainda obteremos um número que possui o fator 6, que é o MDC desejado. Portanto $MDC(a, b) = MDC(a, b - a)$.

Veja esse exemplo: $MDC(30, 105)$, é o mesmo que $MDC(30, 105-30) = MDC(30, 75)$, que por sua vez é o mesmo que $MDC(30, 75 - 30) = MDC(30, 45)$, que finalmente é $MDC(30, 45-30) = MDC(30, 15)$, e esse é intuitivo, vale 15. Fizemos muitos passos e não precisávamos, bastava ver quantas vezes o 30 cabia no 105 fazendo $105 \div 30$, obtendo a parte inteira como 3, e o exemplo ficaria mais imediato fazendo $MDC(30, 105) = MDC(30, 105 - 3 \times 30) = MDC(30, 15) = 15$.

Problema 1. (OPM Fase Inicial) Esmeralda fez a lição de casa, mas o cachorro dela, Totopázio, rasgou a folha que ela deveria entregar. A lição de casa de Esmeralda pedia para dividir números de cinco algarismos por números de três algarismos. Um dos pedaços rasgados está exibido a seguir, com algumas partes borradas.



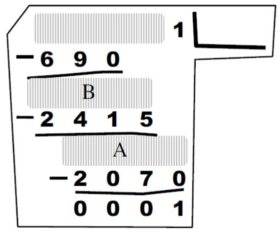
a) Calcule MDC(690; 2415; 2070).

b) Sabendo que Esmeralda acertou as divisões, determine o dividendo e o divisor da conta da direita.

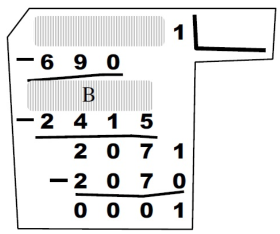
Solução.

a) Como $690 = 2.3.5.23$, $2415 = 3.5.7.23$ e $2070 = 2.3^2.5.23$, $\text{mdc}(690, 2415, 2070) = 3.5.23 = 345$.

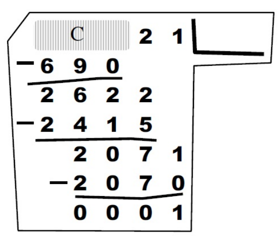
b) Vamos encontrar inicialmente os números A e B, e parte do dividendo, fazendo o processo inverso.



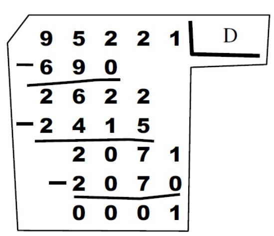
O número A é $2070 + 1 = 2071$.



O número B é $2415 + 207 = 2622$ e, assim, descobrimos o penúltimo algarismo do dividendo, que é 2.



Finalmente, o número C é $690 + 262 = 952$ e, portanto, o dividendo é 95221.



Vamos agora encontrar D, o divisor. Como $\text{MDC}(690, 2415, 2070) = 345$, o número D é um dos divisores positivos de 345, ou seja, pode ser 1, 3, 5, 15, 23, 69, 115 ou 345. Veja que o primeiro passo é dividir 952 por D e obter resto 262 (lembre que o resto é sempre menor que o divisor!); logo os números 1, 3, 5, 15, 23, 69 e 115 não podem ocupar o lugar de D. Portanto o único que resta, 345, é o divisor.

Problema 2. (OBM 1^a Fase) Em 2012 foi realizada a edição 34 da OBM, e $MDC(2012, 34) = 2$. Supondo que a OBM sempre será realizada todo ano, qual é o maior valor possível para o MDC do ano e da edição da OBM realizada no ano?
Solução. Note que se estivermos na edição de número x da OBM, estaremos no ano de $1978+x$. Assim, estamos interessados no maior valor possível de $MDC(x, 1978+x)$. Mas veja que isso é o mesmo que calcular $MDC(x, 1978 + x - x) = MDC(x, 1978)$. O maior valor possível para esse MDC é 1978, que pode ser atingido tomando $x = 1978$.

1 Problemas

Múltiplos, Divisores e Primos II: Problemas Introdutórios

Problema 3. O máximo divisor comum entre os números $1221, 2332, 3443, 4554, \ldots, 8998$ é:

Problema 4. O MMC de 12, 15, 20 e k é 420. Qual é o menor valor possível de k?

Problema 5. Senhor Namm assou 252 biscoitos, senhora Clancy assou 105 biscoitos e senhor Palavas assou 168 biscoitos. Cada um deles colocou os biscoitos em pacotes com o mesmo número de biscoitos. Qual é o maior número de biscoitos que um pacote poderia ter?

Múltiplos, Divisores e Primos II: Problemas Propostos

Problema 6. Quatro números inteiros positivos $a < b < c < d$ são tais que o MDC entre quaisquer dois deles é maior do que 1, mas $MDC(a, b, c, d) = 1$. Qual é o menor valor possível para d?

Problema 7. Carlinhos escreve números inteiros positivos diferentes e menores do que 1000 em várias bolas e coloca-as numa caixa, de modo que Mariazinha possa pegar ao acaso duas dessas bolas. Quantas bolas no máximo Carlinhos irá colocar na caixa se os números das duas bolas deverão ter um divisor comum maior do que 1?

Problema 8. Juca listou todos os números que podem ser escritos, da esquerda para a direita, obedecendo as seguintes regras:

- não começar com zero;
- não repetir algarismos;

- acrescentar um novo algarismo somente se for múltiplo ou divisor do último algarismo escrito;
- continuar a escrita do número enquanto for possível acrescentar um novo algarismo.

Por exemplo, o número 2015 está na lista de Juca, pois ele é escrito começando com 2, que é diferente de 0, depois com 0, que é múltiplo de 2, depois com 1, que é divisor de 0, e seguido de 5, que é múltiplo de 1. A escrita termina com 5, pois este algarismo não é múltiplo nem divisor dos algarismos que ainda não foram escritos $(3, 4, 6, 7, 8e9)$.

a) O número 1063 não está na lista de Juca, pois é possível acrescentar um último algarismo na direita do 3. Qual é esse algarismo?

b) Juca escreveu os números de sua lista em ordem crescente. Qual é o primeiro número que ele escreveu depois do 2015?

c) Qual é o menor número da lista de Juca?

d) Qual é o maior número da lista de Juca?

Problema 9. Qual é o maior valor possível do MDC de dois números distintos pertencentes ao conjunto $1, 2, 3, \ldots, 2011$?

Problema 10. No encarte do álbum *Presence* do grupo musical *Led Zeppelin*, uma ilustração mostra parte de uma multiplicação, na qual os números multiplicados e o resultado não aparecem. Todavia, as parcelas que aparecem quando se multiplica cada dígito de um número pelo outro número são visíveis:

$$
\begin{array}{r}
????\\
\times\ ???\\
\hline
33240\\
77240+\\
25080++\\
\hline
???????
\end{array}
$$

Utilize uma calculadora nesse problema.

(a) Calcule $MDC(25080; 77240)$.

(b) Mostre que a conta acima está incorreta, ou seja, que as parcelas acima não podem ser o produto de dígitos por um mesmo número.

(c) Trocando um dígito de cada uma das duas primeiras parcelas (33240 e 77240), é possível conseguir parcelas que podem ser obtidas em uma multiplicação. Descubra os números que estavam sendo multiplicados.

Múltiplos, Divisores e Primos II: Soluções dos Introdutórios

4) (OBM 1^a Fase) Sendo d o MDC destes números, temos que a diferença entre 1221 e 2332 é 1111, ou seja, $2332 = 1221 + 1111$. Na verdade a diferença entre dois números consecutivos da sequência é 1111. Portanto $d = MDC(1221, 2332) = MDC(1221, 2331 - 1221) = MDC(1221, 1111)$. Como $1111 = 11 \times 101$e ambos os fatores são primos, 101 não divide 1221, mas 11 divide todos os 8 números, 11 é o MDC procurado.

5) (EUA - Mathcounts) Veja, $12 = 2^2.3^1$, $15 = 3^1.5^1$, $20 = 2^2.5^1$ e $420 = 2^2.3^1.5^1.7^1$. Como $MMC(12, 15, 20, k) = 420$ e a fatoração de 420 é feita com as maiores potências de primos dos números 12, 15, 20 e k, temos que os fatores 2, 3 e 5 já estão e com as potências certas, falta apenas o 7^1, portanto $k = 7$.

6) (EUA - Mathcounts) O número que estamos procurando deve ser um divisor simultâneo dos três números de biscoitos, como queremos o maior número de biscoito, estamos procurando o $MDC(252, 105, 168)$. Veja que $MDC(105, 252) = MDC(105, 252 - 2 \times 105) = MDC(105, 42) = MDC(105 - 2 \times 42, 42) = MDC(21, 42) = 21$. Agora é so verificar se 21 também é divisor de 168, e de fato é, portanto eles podem fazer pacotes com 21 biscoitos. Outra solução seria fatorar 252, 105 e 168 em fatores primos.

Múltiplos, Divisores e Primos II: Soluções dos Propostos

7) (OBM 1^a Fase) Nenhum dos inteiros em questão é uma potência de um primo p pois caso contrário todos os outros inteiros teriam o fator p em comum e isso não é permitido. Logo d possui pelo menos dois fatores primos distintos. Além disso, um dos números a, b, c, d é ímpar; caso contrário $MDC(a, b, c, d) = 2$. Assim, como o menor número ímpar com dois fatores primos distintos é 15, $d \geq 15$ .Para $d = 15$, temos como exemplo $a = 6$, $b = 10$, $c = 12$ e $d = 15$.

8) (OBM 2^a Fase) São 499. Não podemos colocar o número 1 em nenhuma bola, pois o MDC entre 1 e qualquer outro número é 1, assim temos 998 números disponíveis. Além disso, se forem usadas 500 bolas ou mais, haverá duas com números consecutivos, sempre primos entre si, então não podemos colocar mais que 499 bolas. Mas existe uma forma de colocar 499 bolas, usando os números pares de 2 a 998.

9) (OBMEP 2^a Fase)

   a) Como não é possível repetir algarismos, os algarismos que podem ser acrescentados na direita de 1063 são $2, 4, 5, 7, 8$ e 9; desses, o único que é múltiplo ou divisor de 3 é o algarismo 9 (9 é múltiplo de 3). O número 10639 está na lista de Juca, não é possível acrescentar um novo algarismo pois $2, 4, 5, 7$ e 8 não são múltiplos nem divisores de 9.

b) O número natural sucessor de 2015 é 2016, entretanto ele não está na lista de Juca, pois os números dessa lista devem ser acrescidos de algarismos enquanto for possível colocar múltiplo ou divisor do último algarismo escrito, ou seja 2016 pode ser completado a 201639. O próximo número que vem depois do 2016 é 2017, e este sim está na lista de Juca, já que $3, 4, 5, 6, 8$ e 9 não são múltiplos nem divisores de 7.

c) Como qualquer número é múltiplo de 1 e divisor de 0, todos os números listados por Juca vão conter os algarismos 0 e 1 e sempre será possível acrescentar outro algarismo disponível na direita desses dois algarismos. Assim, todos os números listados por Juca têm pelo menos três algarismos. Os primeiros números com três algarismos distintos são 102, 103 e 104, que não estão na lista de Juca, pois é possível acrescentar 4 ou 8 na direita do 2, 6 ou 9 na direita do 3 e 2 ou 8 na direita do 4. Como 105 está na lista de Juca, pois não é possível acrescentar os algarismos $2, 3, 4, 6, 7, 8$ e 9 na direita do 5, segue que esse é o menor número na lista de Juca.

d) O maior número da lista de Juca é o 9362841705. Ele é o maior porque contém todos os algarismos, começa com 9 e sempre é acrescentado, a cada vez, o maior algarismo possível que seja múltiplo ou divisor do último algarismo escrito.

10) (OBM 2^a Fase) O MDC de dois números é divisor de cada um dos dois números, ou seja, cada um dos dois números é múltiplo de seu MDC. Logo queremos o maior valor de d que tem dois múltiplos positivos menores ou iguais a 2011. O maior dos dois múltiplos de d é maior ou igual a $2d$, logo $2d \leq 2011 \iff d \leq 1005$. Como 1005 e $2 \times 1005 = 2010$ são ambos menores do que 2011, o valor procurado é 1005.

11) (OPM Fase Final)

a) Temos $MDC(77240; 25080) = MDC(25080; 77240-3\cdot 25080) = MDC(25080; 2000) = MDC(2000; 25080 - 12 \cdot 2000) = MDC(2000; 1080) = MDC(1080; 2000 - 1080) = MDC(1080; 920) = MDC(920; 1080 - 920) = MDC(920; 160) = MDC(160; 920 - 5 \cdot 160) = MDC(160; 120) = 40$.

b) Observe que 77240 e 25080 devem ser resultados do produto de um dos fatores da multiplicação por algarismos. Logo o fator multiplicado deve ser divisor comum de 77240 e 25080, sendo então divisor de $MDC(77240; 25080) = 40$. Mas nesse caso os algarismos devem ser pelos menos iguais a $77240/40$ e $25080/40$, respectivamente, o que é impossível pois ambos os quocientes são maiores que 10.

Outra maneira de pensar: O único número de quatro dígitos, que, se multiplicado por um número de apenas um dígito, obtemos 77240 é 9655. Mas esse número não é divisível por 25080 nem por 33240, portanto não há como multiplicarmos este número, por outro x, que dê 25080 a 33240.

c) Trocando 33240 por 33440 e 772400 por 752400, a conta fica correta. Como $MDC(33240; 75240; 25080) = 8360$ e $33240/8360 = 4$, $75240/8360 = 9$ e $25080/8360 =$

3, os números multiplicados são 8360 e 493.

$$
\begin{array}{r}
8360 \\
\times\ 394 \\
\hline
33440 \\
75240+ \\
25080{+}{+} \\
\hline
3293840
\end{array}
$$