Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

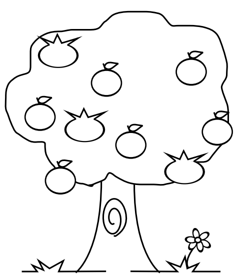
Prof. Bruno Holanda

Aula 3

Paridade

Todo número é par ou ímpar. Óbvio, não? Pois é com essa simples afirmação que vamos resolver os problemas deste capítulo.

Problema 1. No reino da Frutilândia existe uma árvore mágica que possui 2005 maçãs e 2006 tomates. Todo dia um garoto sobe na árvore e come duas frutas. Quando ele come duas frutas iguais, nasce um tomate na árvore; quando ele come duas frutas diferentes, nasce uma maçã. Após alguns dias restará apenas uma fruta na árvore. Que fruta será?



Solução. Sempre que o garoto pega duas frutas da árvore, o número de maçãs diminuirá de 2 ou permanecerá constante. Dessa forma a paridade do número de maçãs será sempre o mesmo. Como inicialmente tínhamos um número ímpar de maças, a quantidade delas continuará ímpar até o final. Logo, a última fruta deve ser uma maçã. □

Problema 2. Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou amarelo) dispostos da seguinte forma:

1◯ 2◯ 3◯

4◯ 5◯ 6◯

7◯ 8◯ 9◯

Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e os seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus oito vizinhos porém ele não. Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos amarelos?

Solução. Note que ao apertar um dos botões 1, 3, 7 ou 9 trocamos de cor 4 botões. Apertando um dos botões 2, 4, 6 ou 8 trocamos a cor de 6 botões. Apertando o botão do centro trocamos a cor de 8 botões. Como 4, 6 e 8 são números pares a quantidade total de botões verdes é sempre um número par e para ter os 9 botões amarelos, deveriamos ter zero botões verdes. Absurdo, já que 0 é um número par. □

Para mostrar a relevância do tema que estamos estudando em competições de matemática, vamos resolver dois problemas que apareceram na olimpíada do Leningrado (com o final na União Soviética, passou a ser conhecida como São Petersburgo).

Problema 3. (Leningrado 1990) Paula comprou um caderno com 96 folhas, com páginas enumeradas de 1 a 192. Nicolas arrancou 25 folhas aleatórias e somou todos os 50 números escritos nestas folhas. É possível que esta soma seja 1990?

Solução. Observe que a soma dos números escritos em uma mesma folha sempre é ímpar. Dessa forma, se Nicolas arrancou 25 folhas, a soma de todos os números será ímpar. Pois é a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares. Logo, esta soma não pode ser 1990. □

Problema 4. (Leningrado 1989) Um grupo de K físicos e K químicos está sentado ao redor de uma mesa. Alguns deles sempre falam a verdade e outros sempre mentem. Sabe-se que o número de mentirosos entre os físicos e químicos é o mesmo. Quando foi perguntado: "Qual é a profissão de seu vizinho da direita?", todos responderam "Químico." Mostre que K é par.

Solução. Pela resposta das pessoas do grupo, podemos concluir que do lado esquerdo de um físico sempre está sentado um mentiroso e que do lado direito de um mentiroso sempre existe um físico. Então, o número de físicos é igual ao número de mentirosos, que é claramente par. Então K é par. □

Problema 5. Um gafanhoto vive na reta coordenada. Inicialmente, ele se encontra no ponto 1. Ele pode pular 1 ou 5 unidades, tanto para direita quanto para esquerda. Porém, a reta coordenada possui buracos em todos os pontos que são múltiplos de 4 (i.e. existem buracos nos pontos $-4, 0, 4, 8$ etc), então ele não pode pular para estes pontos. Pode o gafanhoto chegar ao ponto 3 após 2003 saltos?

Solução. Note que a cada salto, muda a paridade do ponto em que o gafanhoto se encontra. Logo, após 2003 saltos, ele estará em uma coordenada par. Portanto, não pode ser 3. □

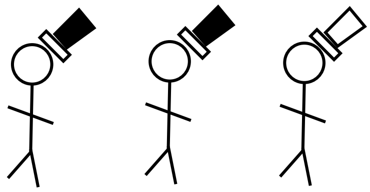
Para finalizar vamos resolver um problema interessante onde o uso da paridade não é tão fácil de perceber. Convidamos o leitor a tentar achar uma solução, antes de ler a resposta em sequência.

O PROBLEMA DOS CHAPÉUS

Imagine que 10 prisioneiros estejam trancados em uma cela quando chega um carcereiro com o seguinte comunicado:

— *Amanhã todos vocês passarão por um teste. Todos vocês ficarão em fila indiana e serão colocados chapéus nas cabeças de um de vocês. Cada um poderá ver os chapéus dos que estarão a sua frente. Porém, não poderão ver os chapéus dos que estão atrás, nem o seu próprio chapéu. Os chapéus serão pretos ou brancos. Feito isso, será perguntado a cada um de vocês, do último para o primeiro, em ordem, qual a cor do seu chapéu. Se a pessoa errar a cor do seu chapéu, será morta.*

Será que os prisioneiros podem montar uma estratégia para salvar pelo menos 9 deles?



Pensando no problema:

Bem, vamos começar a discutir o problema da seguinte maneira: será que se eles combinarem de cada um deles falar a cor do chapéu que está imediatamente a sua frente, eles podem salvar a maior parte do bando?

Esta é a ideia que todos têm inicialmente, mas logo verifica-se que essa estratégia não funciona, pois basta que as cores dos chapéus estejam alternadas para a estratégia não funcionar. (Lembre-se: estamos procurando uma estratégia que seja independente da escolha dos chapéus).

Então devemos pensar de maneira mais profunda. Veja que durante o teste, cada um dos prisioneiros pode falar apenas uma entre duas palavras que são; preto ou branco. Isto corresponde a um sistema de linguagem binário. Outras formas de linguagem binária são: sim e não, zero ou um, par ou ímpar. E é exatamente esta analogia que vamos utilizar para montar nossa estratégia. Que será a seguinte:

O último da fila deve olhar para a frente e contar o número de chapéus pretos. Se este número for ímpar, ele deve gritar preto. Caso contrário, ele deve gritar branco. Com isso, todos ficam sabendo a paridade da quantidade de chapéus pretos que existem entre os nove da fila.

Agora, o penúltimo vai olhar para frente e ver a quantidade de chapéis pretos. Se a paridade continuar a mesma informada pelo último, então seu chapéu é branco. Se mudar, ele pode concluir que seu chapéu é preto. E isto pode ser feito para todos os membros da fila, pois todos saberão a cor dos chapéus dos anteriores (tirando a cor do chapéu do último) e a paridade dos chapéus pretos que existem entre os nove primeiros.

Portanto, é possível salvar os nove primeiros, enquanto o último pode ser salvo, se ele tiver sorte!

Vale ressaltar que as ideias presentes nesta aula serão de certa forma generalizadas em aulas futuras como nas aulas de tabuleiros e invariantes.

Problemas Propostos

Problema 6. Existe alguma solução inteira para a equação $a \cdot b \cdot (a - b) = 45045$.

Problema 7. Os número $1, 2, ..., n$ estão escritos em sequência. É permitido permutar quaisquer dois elementos. É possível retornar à posição inicial após 2001 permutações?

Problema 8. Um círculo está dividiso em seis setores que estão marcados com os números $1, 0, 1, 0, 0, 0$ no sentido horário. É permitido somar 1 a dois setores vizinhos. É possível, repetindo esta operação várias vezes, fazer com que todos os números se tornem iguais?

Problema 9. É possível que as seis diferenças entre dois elementos de um conjunto de quatro números inteiros serem iguais a 2, 2, 3, 4, 4 e 6?

Problema 10. Raul falou que tinha dois anos a mais que Kátia. Kátia falou que tinha o dobro da idade de Pedro. Pedro falou que Raul tinha 17 anos. Mostre que um deles mentiu.

Problema 11. (Torneio das Cidades 1987) Uma máquina dá cinco fichas vermelhas quando alguém insere uma ficha azul e dá cinco fichas azuis quando alguém insere uma ficha vermelha. Pedro possui apenas uma ficha azul e deseja obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas usando essa máquina. É possível fazer isto?

Problema 12. (China 1986) Considere uma permutação dos números $1, 1, 2, 2, ..., 1998, 1998$ tal que entre dois números k existem k números. É ou não possível fazer isto?

Problema 13. (Rússia 2004) É possível colocarmos números inteiros positivos nas casas de um tabuleiro 9×2004 de modo que a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna sejam primos? Justifique sua resposta.

Problema 14. O número A possui 17 dígitos. O número B possui os mesmos dígitos de A, porém em ordem inversa. É possível que todos os dígitos de $A + B$ sejam ímpares?

Problema 15. *Considere um tabuleiro 1998×2002 pintado alternadamente de preto e branco da maneira usual. Em cada casa do tabuleiro, escrevemos 0 ou 1, de modo que a quantidade de 1's em cada linha e em cada coluna do tabuleiro é ímpar. Prove que a quantidade de 1's escritos nas casas brancas é par.

Problema 16. *(Ucrânia 1997) Considere um tabuleiro pintado de preto e branco da maneira usual e, em cada casa do tabuleiro, escreva um número inteiro, de modo que a soma dos números em cada coluna e em cada linha é par. Mostre que a soma dos números nas casas pretas é par.

Dicas e Soluções

6. Analise as quatro possibilidades de paridade do par (a, b).

9. Se x e y são números inteiros, $x+y$ e $x-y$ possuem a mesma paridade.

13. Suponha que seja possível fazer tal construção. Sejam $L_1, L_2, ..., L_9$ as somas dos números de cada uma das 9 linhas, e $C_1, C_2, ..., C_{2004}$ as somas dos números de cada uma das 2004 colunas. Como cada L_i e C_j são primos, estes devem ser números ímpares (já que são soma de pelo menos nove inteiros positivos). Seja S a soma de todos os números do tabuleiro. Por um lado teríamos:

$$S = L_1 + L_2 + \cdots + L_9$$

donde concluímos que S é ímpar, pois é soma de 9 ímpares. Por outro lado:

$$S = C_1 + C_2 + \cdots + C_{2004}$$

e daqui concluiríamos que S é par, o que é um absurdo. Logo tal construção não é possível.

15. Seja $a_{i,j}$ o número escrito na casa da i-ésima linha e da j-ésima coluna, $1 \leq i \leq 1998$ e $1 \leq j \leq 2002$. A casa (i, j) é branca se e somente se i e j possuem a mesma paridade.

$$L = \sum_{i=1}^{999} \sum_{j=1}^{2002} a_{2i-1,j}$$

é a soma dos números nas 999 linhas de ordem ímpar. Como a soma dos números de cada linha é ímpar, L é ímpar. De maneira análoga, a soma dos números nas 1001 colunas de ordem par

$$C = \sum_{j=1}^{1001} \sum_{i=1}^{1998} a_{2j,i}$$

também é ímpar. Seja P o conjunto de todas as casas pretas que estão em colunas de ordem par, e $S(P)$ a soma de todos os números escritos nas casas de P.

Cada número escrito em uma casa de P aparece exatamente uma vez na soma L e exatamente uma vez na soma C. Ademais, cada número escrito em uma casa branca aparece exatamente uma vez na soma $L+C$. Assim, a soma dos números escritos nas casas brancas é igual a $L + C - 2S(P)$, que é par.

Combinatória 03 - Paridade

Problema 6. Existe alguma solução inteira para a equação $a \cdot b \cdot (a - b) = 45045$?

Solução. Não. Se a e b tiverem paridades diferentes então um dos dois é par, de forma que $a \cdot b$ é par. Mas isso é uma contradição já que 45045 é ímpar.
Agora, se a e b tiverem a mesma paridade então $a - b$ deve ser par e do mesmo modo chegamos a uma contradição.
Logo, não há solução inteira.

Problema 7. Os números $1, 2, \ldots, n$ estão escritos em sequência. É permitido permutar quaisquer dois elementos. É possível retornar à posição inicial após 2001 permutações?

Solução.
Dizemos que uma sequência tem uma inversão quando um número maior vem antes de um número menor.
O número de inversões de uma sequência é o número de pares (a, b) com $a > b$ que podemos encontrar na sequência tais que a aparece antes de b.
Por exemplo, o número de inversões da sequência $(1, 3, 2, 5, 4)$ é 2.
Verifique que ao permutarmos 2 números, a paridade do número de inversões muda.

No problema, a sequência inicial tem 0 inversões. Como são feitas 2001 permutações, temos 2001 mudanças de paridade do número de inversões. Dessa forma, o número de inversões final deve ser ímpar.
Então não podemos ter, ao fim, a sequência inicial.

Problema 8. Um círculo está dividido em seis setores que estão marcados com os números $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0$ no sentido horário. É permitido somar 1 a dois setores vizinhos. É possível, repetindo esta operação várias vezes, fazer com que todos os números se tornem iguais?

Solução. Suponha que os números nos setores sejam a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 no sentido horário.
Vamos chamar de S o módulo do número $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$.
Note que ao somar 1 a dois setores vizinhos o valor de S não se altera.
Então $S = 1 - 0 + 1 - 0 + 0 - 0 = 2$.
Desse modo, é impossível que todos os números sejam iguais pois teríamos $S = 0$.

Problema 9. É possível que as seis diferenças entre dois elementos de um conjunto de quatro números inteiros serem iguais a 2, 2, 3, 4, 4 e 6?

Solução. Não. Imagine que o conjunto seja $\{a, b, c, d\}$. Então podemos supor $3 = a - b$.
Mas $a - b = (a - c) + (c - b)$ e $a - c$ e $c - b$ são diferenças de dois elementos do conjunto.
Porém, todas as diferenças, com exceção de 3, são pares. Logo, $(a - c) + (c - b)$ é par.
Isso é uma contradição já que esse valor é igual a 3 que é ímpar.
Concluimos que não é possível que as diferenças sejam essas.

Problema 10. Raul falou que tinha dois anos a mais que Kátia. Kátia falou que tinha o dobro da idade de Pedro. Pedro falou que Raul tinha 17 anos. Mostre que um deles mentiu.

Solução. Suponha que ninguém mentiu. Então Raul tem 17 anos e portanto Kátia tem 15 anos. Mas Kátia tem o dobro da idade de Pedro e, portanto, sua idade deve ser par, contradição.
Logo, alguém deve ter mentido.

Problema 11. (Torneio das Cidades 1987) Uma máquina dá cinco fichas vermelhas quando alguém insere uma ficha azul e dá cinco fichas azuis quando alguém insere uma ficha vermelha. Pedro possui apenas uma ficha azul e deseja obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas usando essa máquina. É possível fazer isto?

Solução. Não. Observe que quando Pedro insere uma ficha e recebe cinco seu número de fichas aumenta 4 unidades. Logo, a paridade do número de fichas não muda.
Para ter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas Pedro deve ter um número par de fichas, mas isso não é possível já que ele inicialmente só possui 1 ficha e 1 é ímpar.

Problema 12. (China 1986) Considere uma permutação dos números 1, 1, 2, 2, $\ldots$, 1998, 1998 tal que entre dois números k existem k números. É ou não possível fazer isto?

Solução. Contados da esquerda para a direita, denotemos por a_k e b_k as posições do primeiro e segundo número k, respectivamente. Note que $1 \leq a_k < b_k \leq 2 \times 1998$
Como existem k números entre dois números k's, devemos ter $b_k - a_k = k + 1$. Se é possível escrever os números 1, 1, 2, 2, $\ldots$, n, n em linha como no enunciado, obtemos:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = 1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n + 1)$$

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \ldots + (b_n - a_n) = 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - 1$$

Somando as duas linhas,

$$2(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \frac{5n(n + 1)}{2}$$

Logo, a fração $\dfrac{5n(n+1)}{2}$ deve ser um inteiro par.
Para $n = 1998$,

$$\frac{5n(n+1)}{2} = 9985005$$

é ímpar e consequentemente não é possível dispormos esses números em linha.

Problema 13. (Rússia 2004) É possível colocarmos números inteiros positivos nas casas de um tabuleiro 9×2004 de modo que a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna sejam primos? Justifique sua resposta.

Solução. Suponha que seja possível fazer tal construção. Sejam $L_1, L_2, \ldots, L_9$ as somas dos números de cada uma das 9 linhas, e $C_1, C_2, \ldots, C_{2004}$ as somas dos números de cada uma das 2004 colunas. Como cada L_i e C_j são primos, estes devem ser números ímpares (já que são soma de pelo menos nove inteiros positivos e portanto são maiores que 2). Seja S a soma de todos os números do tabuleiro. Por um lado teríamos:

$$S = L_1 + L_2 + \ldots + L_9$$

donde concluímos que S é ímpar, pois é soma de 9 ímpares. Por outro lado:

$$S = C_1 + C_2 + \ldots + C_{2004}$$

e daqui concluímos que S é par, pois é uma soma de uma quantidade par de ímpares, o que é um absurdo. Logo, tal construção não é possível.

Problema 14. O número A possui 17 dígitos. O número B possui os mesmos dígitos de A, porém em ordem inversa. É possível que todos os dígitos de A + B sejam ímpares?

Solução. Não. Vamos mostrar que algum dos dígitos deve ser par. Considere a seguinte soma:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & a_{16} & a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
+ & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
\hline
r_{17} & r_{16} & r_{15} & r_{14} & r_{13} & r_{12} & r_{11} & r_{10} & r_9 & r_8 & r_7 & r_6 & r_5 & r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & r_0
\end{array}$$

Se r_8 for par (teríamos $r_8 = 2a_8 - 10k$) então o problema acaba. Suponha então que isso não ocorre. A única possibilidade é a de que a soma anterior ficou maior do que ou igual a 10 e 1 foi adicionado a soma dos a_8.
Temos dois casos:

- $a_7 + a_9 = 9$ e a soma deles (acima de r_7) recebeu um 1 da soma anterior, isso implicaria que $r_7 = 0$ e o problema acabaria aqui;
- o segundo caso é $a_7 + a_9 \geq 10$.

Vamos então supor que $a_7 + a_9 \geq 10$.
Repare que se $a_7 + a_9 \geq 10$ então $r_{10} = a_{10} + a_6 + 1 - 10k$.
Se r_{10} e r_6 tiverem paridades diferentes, um dos dois será par e então o problema acaba.
Vamos supor que isso não ocorre. Para que isso não ocorra, a soma acima de r_6 também deve receber um 1 da soma anterior.
Dessa forma, analogamente como fizermos com $a_7 + a_9$, podemos supor que $a_5 + a_{11} \geq 10$.
Usando o mesmo argumenta de paridades diferentes entre r_{12} e r_4 chegamos a suposição de que $a_3 + a_{13} \geq 10$.
Repetindo mais uma vez esse processo nós chegamos em $a_1 + a_{15} \geq 10$.
Com isso, nós concluímos que a soma acima de r_{16} receberá um 1 da soma anterior que é a de $a_{15} + a_1$. Isso quer dizer que $r_{16} = a_{16} + a_0 + 1 - 10k$. Porém, como não há soma antes de r_0, devemos ter $r_0 = a_0 + a_{16} - 10k'$. Note que r_0 e r_{16} têm paridades diferentes e então algum dos dois é par. Isso conclui a demonstração.

Repare que esses argumentos valem para qualquer natural com um número ímpar de dígitos, basta que exista o dígito do meio - nesse caso é o a_8.

Problema 15. Considere um tabuleiro 1998×2002 pintado alternadamente de preto e branco da maneira usual. Em cada casa do tabuleiro, escrevemos 0 ou 1, de modo que a quantidade de 1s em cada linha e em cada coluna do tabuleiro é ímpar. Prove que a quantidade de 1s escritos nas casas brancas é par.

Solução. Seja $a_{i,j}$ o número escrito na casa da i-ésima linha e da j-ésima coluna, $1 \leq i \leq 1998$ e $1 \leq j \leq 2002$. A casa (i,j) é branca se e somente se i e j possuem a mesma paridade.

$$L = \sum_{i=1}^{999} \sum_{j=1}^{2002} a_{2i-1,j}$$

é a soma dos número nas 999 linhas de ordem ímpar. Como a soma dos números de cada linha é ímpar, L é ímpar. De maneira análoga, a soma dos números nas 1001 colunas de ordem par

$$C = \sum_{j=1}^{1001} \sum_{i=1}^{1998} a_{i,2j}$$

também é ímpar. Seja P o conjunto de todas as casas pretas que estão em colunas de ordem par, e $S(P)$ a soma de todos os números escritos nas casas de P.

Cada número escrito em uma casa de P aparece exatamente uma vez na soma L e exatamente uma vez na soma C. Ademais, cada número escrito em uma casa branca aparece exatamente uma vez na soma $L + C$. Assim, a soma dos números escritos nas casas brancas é igual a $L + C - 2S(P)$, que é par.

Problema 16. (Ucrânia 1997) Considere um tabuleiro pintado de preto e branco da maneira usual e, em cada casa do tabuleiro, escreva um número inteiro, de modo que a soma dos números em cada coluna e em cada linha é par. Mostre que a soma dos números nas casas pretas é par.

Solução. A sólução é análoga à do problema anterior.
A casa (i, j) é a casa da i-ésima linha e j-ésima coluna. A casa (i, j) é preta se e somente se i e j têm paridades diferentes.
Seja L_k e C_k a soma dos números nas k-ésima linha e coluna respectivamente. Então,

$$L = L_1 + L_3 + L_5 + L_7 + \dots$$

é a soma dos linhas de ordem ímpar e

$$C = C_1 + C_3 + C_5 + C_7 + \dots$$

é a soma das colunas também de ordem ímpar. Como a soma dos números em cada coluna e em cada linha é par, L e C devem ser pares.

Seja B o conjunto de todas as casas brancas em colunas de ordem ímpar, e $S(B)$ a somas dos números escritos nas casa de B.

Cada casa de B é contada uma vez em C e uma vez em L. Além disso, cada casa preta é contada exatamente uma vez na soma $L + C$. Logo, a soma dos números nas casas pretas é $L + C - 2S(B)$ que é par.