Problemas Resolvidos

Nível 2

Relações entre áreas - Parte 2

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problema 1. (Portugal) Seja ABC um triângulo retângulo em A. Considere um ponto E sobre a hipotenusa e traça-se a partir desse ponto uma paralela ao cateto AC. Seja D a interseção desta paralela com o cateto AB. Prove que

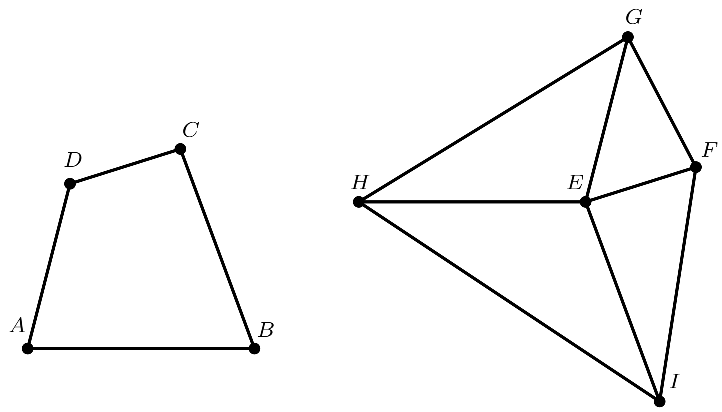
$$\frac{BD}{DE} + \frac{DE}{BD} = \frac{BC^2}{2S},$$

sendo S a área do triângulo ABC.

Problema 2. (OBM) É dado um quadrilátero convexo $ABCD$. Sejam E, F, G e H os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Determine a posição de um ponto P de forma que os quadriláteros $PHAE$, $PEBF$, $PFCG$ e $PGDH$ tenham a mesma área.

Problema 3. Seja $ABCDE$ um pentágono convexo (não necessariamente regular) tal que os triângulos ABC, BCD, CDE, DEA e EAB tem área 1. Qual a área do pentágono?

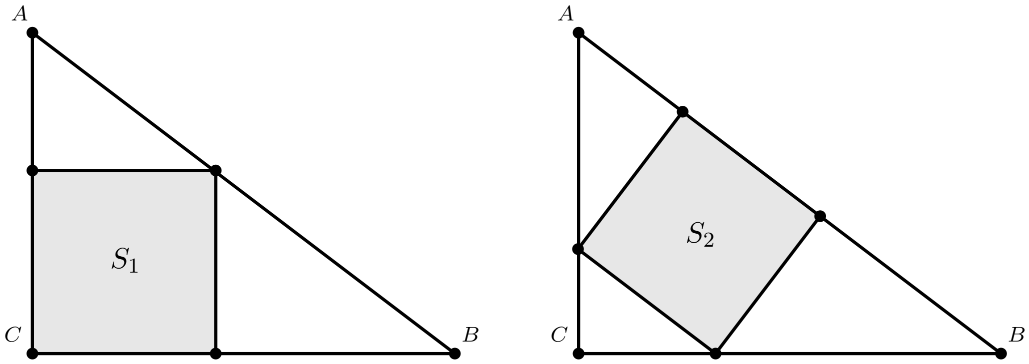
Problema 4. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e sejam EH, EI, EF e EG segmentos paralelos e iguais a AB, BC, CD e DA, como mostra a figura abaixo.



Determine a razão entre as áreas dos quadriláteros $HIFG$ e $ABCD$.

Problema 5. (OBM) $ABCD$ é um quadrilátero convexo e inscritível e M é um ponto sobre o lado CD, tal que o triângulo ADM e o quadrilátero $ABCM$ têm a mesma área e o mesmo perímetro. Prove que $ABCD$ tem dois lados de comprimentos iguais.

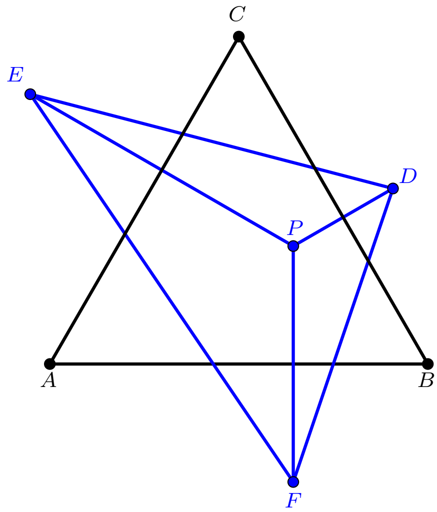
Problema 6. (AIME) Quadrados S_1 e S_2 são inscritos em um triângulo retângulo ABC, como mostrado na figura abaixo.



Determine $AC + CB$ se a área de S_1 é igual a 441 e a área de S_2 é igual a 440.

Problema 7. Os pontos médios das diagonais AC, CE, EA, BD, DF e FB do hexágono convexo $ABCDEF$ são vértices de um novo hexágono. Calcular a relação entre as áreas do dois hexágonos.

Problema 8. Seja P um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC, e sejam D, E e F os simétricos de P em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente.



Qual é maior, a área do triângulo ABC ou a área do triângulo DEF?

Soluções

1. Usando que os triângulos $\triangle BDE$ e $\triangle ABC$ são semelhantes, que $2[ABC] = AB \cdot AC$ e o Teorema de Pitágoras, temos

$$\frac{BD}{DE} + \frac{DE}{BD} = \frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC} = \frac{BC^2}{2S}.$$

2. Queremos construir um ponto P tal que cada um dos quadriláteros $PHAE$, $PEBF$, $PFCG$ e $PGDH$ tenha área igual a $\frac{[ABCD]}{4}$.

Como E e F são pontos médios de AB e BC, respectivamente, temos que EF é a base média do $\triangle ABC$ relativa à AC, isto é $EF \parallel AC$ e $EF = \frac{AC}{2}$. Isto implica que $[BEF] = \frac{1}{4}[ABC]$. Analogamente GH é base média do $\triangle ADC$ e, portanto, $[DGH] = \frac{1}{4}[ACD]$.

Temos então que

$$[BEF] + [DGH] = \frac{[ABC] + [ACD]}{4} = \frac{[ABCD]}{4}.$$

Logo o ponto P deve ser tal que

$$[PGH] = [BEF] \quad \text{e} \quad [PEF] = [DGH].$$

Denotemos por Q o ponto de interseção das diagonais AC e BD, e chamemos de L e M os pontos de interseção de BD com EF e GH, respectivamente. Note que $BL = LQ$ e $QM = MD$.

Traçamos uma reta r paralela a AC que intersecta BD num ponto P_1 tal que $MP_1 = BL$ e $LP_1 = DM$. Qualquer ponto R que pertença à reta r satisfaz $[RHDG] = [REBF]$.

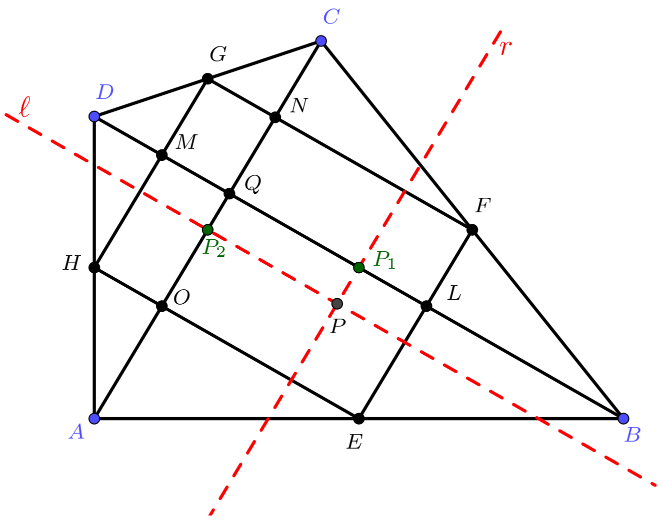
Analogamente temos que FG e EH são bases médias dos triângulos $\triangle CBD$ e $\triangle ABD$, e que

$$[CFG] + [AEH] = \frac{[CBD] + [ABD]}{4} = \frac{[ABCD]}{4}.$$

Chamemos de N e O os pontos de interseção de AC com FG e EH, respectivamente.

Traçamos uma reta ℓ paralela a BD que intersecta AC num ponto P_2 tal que $NP_2 = OA$ e $OP_2 = CN$. Qualquer ponto R que pertença à reta ℓ satisfaz $[RFCG] = [REAH]$.

O ponto P procurado será o ponto de interseção das retas r e ℓ.



3. Como $[ABC] = [ABE]$ e ambos triângulos compartilham a base AB, temos que $AB \parallel CE$. Analogamente também teremos $BC \parallel AD$, $CD \parallel BE$, $DE \parallel AC$ e $AE \parallel BD$.

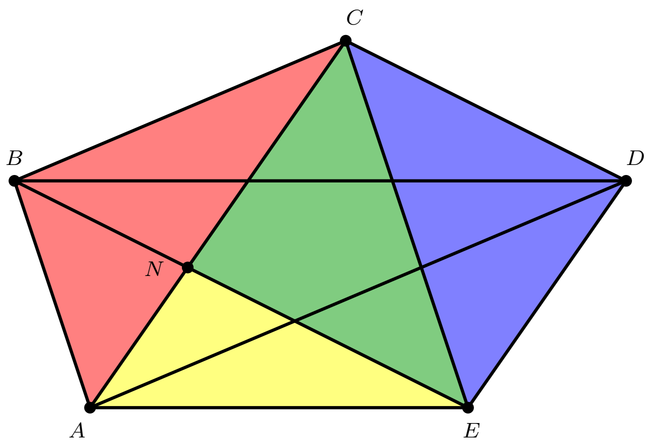
Seja N o ponto de interseção de AC com BE. Como $CDEN$ é um paralelogramo, temos que $[CEN] = [CDE] = 1$. Denotemos $a = [ABN]$ e $b = [ANE]$. Observe que $[BCN] = [ABC] - [ABN] = [ABE] - [ABN] = b$.

Veja que

$$\frac{a}{b} = \frac{[ABN]}{[ANE]} = \frac{BN}{NE} = \frac{[BCN]}{[CEN]} = \frac{b}{1} = b.$$

Logo $a = b^2$. Como $a + b = 1$, temos

$$1 - b = b^2 \implies b^2 + b - 1 = 0 \implies b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$



A área do pentágono $ABCDE$ é igual a

$$[ABC] + [CDE] + [CEN] + [ANE] = 1 + 1 + 1 + b = 3 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

4. Como $AB \parallel EH$ e $AD \parallel EG$, temos que $\angle GEH = 180^\circ - \angle BAD$.

Isto implica que $\operatorname{sen}\angle GEH = \operatorname{sen}\angle BAD$, e analogamente, também vale $\operatorname{sen}\angle GEF = \operatorname{sen}\angle ADC$, $\operatorname{sen}\angle FEI = \operatorname{sen}\angle DCB$ e $\operatorname{sen}\angle IEH = \operatorname{sen}\angle ABC$.

Veja que

$$\begin{aligned}
[ABCD] &= \frac{[ABD] + [BCD] + [ABC] + [ADC]}{2} \\
&= \frac{AB \cdot AD \cdot \operatorname{sen}\angle BAD + AD \cdot CD \cdot \operatorname{sen}\angle ADC + CD \cdot CB \cdot \operatorname{sen}\angle DCB + AB \cdot BC \cdot \operatorname{sen}\angle ABC}{4} \\
&= \frac{EH \cdot EG \cdot \operatorname{sen}\angle GEH + EG \cdot EF \cdot \operatorname{sen}\angle GEF + EF \cdot EI \cdot \operatorname{sen}\angle FEI + EH \cdot EI \cdot \operatorname{sen}\angle IEH}{4} \\
&= \frac{[EGH] + [EFG] + [EFI] = [EIH]}{2} \\
&= \frac{[HIFG]}{2}.
\end{aligned}$$

5. Como $ABCD$ é inscritível, vale que $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. Digamos que $\angle ABC = \alpha$. Temos então que $\operatorname{sen}\angle ABC = \operatorname{sen}\angle ADC = \operatorname{sen}\alpha$.

Podemos escrever

$$[ADM] = \frac{AD \cdot DM \cdot \operatorname{sen} x}{2},$$

e

$$[ABCM] = [ABC] + [ACD] - [ADM] = \frac{\operatorname{sen} x}{2}(AB \cdot BC + AD \cdot CD - AD \cdot DM).$$

Como $[ADM] = [ABCM]$, igualamos as duas equação acima e obtemos

$$2 \cdot AD \cdot DM = AB \cdot BC + AD \cdot CD. \tag{1}$$

Como ADM e $ABCM$ têm também o mesmo perímetro, temos que

$$AD + DM = AB + BC + CM = AB + BC + CD - DM,$$

o que implica que

$$2DM = AB + BC + CD - AD.$$

Substituímos em (1) e obtemos

$$AD(AB + BC + CD - AD) = AB \cdot BC + AD \cdot CD,$$

o que implica que

$$AD \cdot AB - AD^2 + AD \cdot BC - AB \cdot BC = 0.$$

Fatorando, obtemos

$$(AD - BC)(AB - AD) = 0,$$

e isto mostra que $AD = BC$ ou $AD = AB$.

6. Seja $x = AC + BC$ e $y = AB$.

Sejam E em AC, F em BC e G em AB vértices do quadrado S_1, conforme mostra a figura.

Veja que

$$[ABC] = [ACG] + [CBG] = \frac{AC \cdot EG + BC \cdot FG}{2} = \frac{\sqrt{441}}{2}(AC + BC) = \frac{21x}{2}. \tag{2}$$

Por outro lado, também temos que

$$[ABC] = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(AC + BC)^2 - (AC^2 + BC^2)}{4} = \frac{(AC + BC)^2 - AB^2}{4} = \frac{x^2 - y^2}{4}.$$

Igualando ambas equações, obtemos

$$x^2 - y^2 = 42x. \tag{3}$$

Agora, sejam H em AC e I em BC, vértices do quadrado S_2. Seja M o pé da perpendicular traçada desde C até o lado AB, e L o ponto de interseção de HI com CM.

Como os triângulos CHI e ABC são semelhantes, temos

$$\frac{CL}{CL + \sqrt{440}} = \frac{CL}{CM} = \frac{HI}{AB} = \frac{\sqrt{440}}{y}.$$

Logo

$$CL = \frac{\sqrt{440}}{y}(CL + \sqrt{440}).$$

Isolando CL nessa equação, obtemos

$$CL = \frac{440}{y - \sqrt{440}}.$$

Podemos escrever a área do $\triangle CHI$ como

$$[CHI] = \frac{CL \cdot HI}{2} = \frac{440\sqrt{440}}{2(y - \sqrt{440})}. \tag{4}$$

Por outro lado, temos

$$\frac{[CHI]}{[ABC]} = \frac{HI^2}{AB^2} = \frac{440}{y^2}.$$

Usando (2), temos

$$[CHI] = \frac{440 \cdot 21x}{2y^2}. \tag{5}$$

Igualando as equação (4) e (5), obtemos

$$\sqrt{440}y^2 = 21xy - 21\sqrt{440}x.$$

Usando (2), obtemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{440}(x^2 - 42x) &= 21x\sqrt{x^2 - 42x} - 21\sqrt{440}x \\
\sqrt{440}(x - 42) &= 21\sqrt{x^2 - 42x} - 21\sqrt{440} \\
\sqrt{440}(x - 21) &= 21\sqrt{x^2 - 42x} \\
440(x - 21)^2 &= 441(x^2 - 42x).
\end{aligned}$$

E isto implica que x satisfaz a equação

$$x^2 - 42x - 440 \cdot 441 = 0,$$

cuja única solução positiva é

$$x = \frac{42 + \sqrt{42^2 + 4 \cdot 440 \cdot 441}}{2} = 21 + 21\sqrt{1 + 440} = 21 + 21^2 = 462.$$

7. Neste problema usaremos que a área de um quadrilátero $ABCD$ pode ser calculada mediante a fórmula

$$[ABCD] = \frac{AC \cdot BD \cdot \operatorname{sen}\theta}{2},$$

onde AC e BD são as diagonais do quadrilátero e θ é menor ângulo entre elas.

Sejam A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 e F_1 os pontos médios de CE, DF, AE, BF, AC e BD, respectivamente. Note que A_1C_1 é base média do $\triangle AEC$ relativa à base AC; e que B_1D_1 é base média do $\triangle BDF$ relativa à base BD. Logo $A_1C_1 = \frac{AC}{2}$ e $A_1C_1 \parallel AC$; e também $B_1D_1 = \frac{BD}{2}$ e $B_1D_1 \parallel BD$. Como consequência do paralelismo, o menor ângulo formado entre os segmentos AC e BD é igual ao menor ângulo formado entre os segmentos A_1C_1 e B_1D_1; chamemos esse ângulo de θ. Temos então

$$[A_1B_1C_1D_1] = \frac{A_1C_1 \cdot B_1D_1 \cdot \operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{AC \cdot BD \cdot \operatorname{sen}\theta}{8} = \frac{[ABCD]}{4}.$$

De maneira análoga, teremos também

$$[A_1D_1E_1F_1] = \frac{[ADEF]}{4}.$$

E, finalmente,

$$[A_1B_1C_1E_1D_1F_1] = [A_1B_1C_1D_1] + [A_1D_1E_1F_1] = \frac{[ABCD] + [ADEF]}{4} = \frac{[ABCDEF]}{4}.$$

8. Mostraremos que $[DEF] \leq [ABC]$.

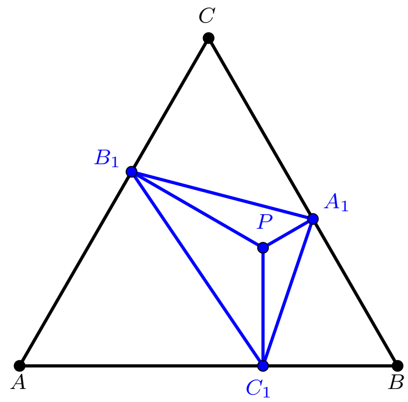
Denotemos por A_1 o ponto de interseção de BC com PD; B_1 o ponto de interseção de AC com PE; e C_1 o ponto de interseção de AB com PF.

Veja que, como A_1 e B_1 são pontos médios de PD e PE, respectivamente, teremos que A_1B_1 é base média do $\triangle PDE$ e, consequentemente $[PA_1B_1] = \frac{[PDE]}{4}$. Analogamente, $[PA_1C_1] = \frac{[PDF]}{4}$ e $[PB_1C_1] = \frac{[PEF]}{4}$. Logo

$$[A_1B_1C_1] = \frac{[DEF]}{4}.$$

Seja agora Q o baricentro (e também incentro, circuncentro e ortocentro) do triângulo equilátero $\triangle ABC$. Sejam A_2, B_2 e C_2 respectivamente os pés das perpendiculares traçadas desde Q até os lados BC, AC e AB, respectivamente (note que são também os pontos médios dos lados do $\triangle ABC$). Como $[A_2B_2C_2] = \frac{[ABC]}{4}$, a razão entre as área dos triângulos ABC e DEF é a mesma razão entre as áreas dos triângulos $A_2B_2C_2$ e $A_1B_1C_1$.

Logo $[DEF] \leq [ABC]$ se e somente se $[A_1B_1C_1] \leq [A_2B_2C_2]$. Esqueceremos os pontos D, E e F e nos concentraremos no que acontece no interior do $\triangle ABC$.



Mostraremos que $[A_1B_1C_1] \leq [A_2B_2C_2]$.

Olhando para a soma dos ângulos internos do quadrilátero AB_1PC_1, temos que $\angle B_1PC_1 = 120°$. Analogamente $\angle A_1PB_1 = \angle A_1PC_1 = 120°$.

Dessa forma teremos

$$[A_1B_1C_1] = [A_1PB_1] + [A_1PC_1] + [B_1PC_1] = \frac{\operatorname{sen} 120°}{2}(PA_1 \cdot PB_1 + PA_1 \cdot PC_1 + PB_1 \cdot PC_1).$$

Vamos supor, sem perda de generalidade, que as medianas do $\triangle ABC$ medem 1. Logo $QA_2 = QB_2 = QC_2 = \frac{1}{3}$.

Assim,

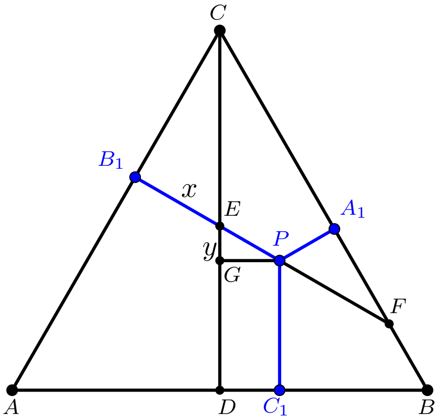
$$[A_2B_2C_2] = [A_2QB_2] + [A_2QC_2] + [B_2QC_2] = \frac{\operatorname{sen} 120°}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen} 120°}{2} \cdot \frac{1}{3}.$$

É suficiente mostrar então que

$$PA_1 \cdot PB_1 + PA_1 \cdot PC_1 + PB_1 \cdot PC_1 \leq \frac{1}{3}.$$

Seja $D = C_2$ o pé da altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado AB. Sejam E e F os pontos de interseção da reta PB_1 com os segmentos CD e BC, respectivamente. Seja G o pé da perpendicular traçada desde P até CD.

Denotemos por x e y os comprimentos de B_1E e EG, respectivamente.



Como $\triangle B_1CE$ é retângulo tendo ângulos medindo 60° e 30°, temos que $CE = 2 \cdot B_1E = 2x$. Pelo mesmo motivo, no $\triangle EGP$, temos $EP = 2 \cdot EG = 2y$. Chamemos de H o pé da perpendicular traçada desde E até BC. Note que, como CD é bissetriz do $\angle ACB$, temos que $EH = EB_1 = x$. Também, no $\triangle EHF$ (que também é retângulo com os ângulos agudos medindo 30° e 60°), temos $EF = 2 \cdot EH = 2x$. Logo $PF = EF - EP = 2x - 2y$. Agora, no $\triangle A_1PF$ retângulo, temos $PA_1 = \frac{PF}{2} = x - y$. Lembrando que estamos assumindo $CD = 1$, temos $GD = 1 - CE - EG = 1 - 2x - y$. Como GDC_1P é um retângulo, temos que $PC_1 = 1 - 2x - y$.

Resumindo, acabamos de mostrar que

$$PA_1 = x - y, \quad PB_1 = x + 2y \quad \text{e} \quad PC_1 = 1 - 2x - y.$$

Temos então

$$\begin{aligned}
PA_1 \cdot PB_1 + PA_1 \cdot PC_1 + PB_1 \cdot PC_1 &= (x-y)(x+2y) + (x-y)(1-2x-y) + (x+2y)(1-2x-y) \\
&= -3x^2 - 3xy - 3y^2 + 2x + y \\
&\leq -3x^2 - 3xy - \frac{3}{4}y^2 + 2x + y \\
&= -\frac{3}{4}(4x^2 + 4xy + y^2) + 2x + y \\
&= -\frac{3}{4}(2x+y)^2 + (2x+y).
\end{aligned}$$

onde na linha onde tem a desigualdade foi usado que $\frac{3}{4} < 3$.

Seja $z = 2x + y$. Para concluir, vamos mostrar que, para todo z, vale a desigualdade

$$-\frac{3}{4}z^2 + z \leq \frac{1}{3}.$$

A prova segue da seguinte fatoração

$$-\frac{3}{4}z^2 + z - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{9}{4}z^2 - 3z + 1\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}z - 1\right)^2 \leq 0.$$

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández