Problemas Resolvidos

Nível 2

Paridade II

Material elaborado por Valentino Amadeus Sichinel

Problemas

Problema 1. 25 meninas e 25 meninos estão sentados ao redor de uma mesa redonda. Mostre que ao menos uma das crianças está sentada entre dois meninos.

Problema 2. Um caracol se desloca pelo plano em velocidade constante, fazendo um ângulo de $90°$ a cada 15 minutos. Mostre que ele só pode retornar ao seu ponto de origem após uma quantidade inteira de horas.

Problema 3. Três gafanhotos estão alinhados, brincando de pular. Em cada turno, um dos gafanhotos pula sobre outro, mas nunca sobre os outros dois ao mesmo tempo. É possível que, após 2021 turnos, os gafanhotos tenham voltado às suas posições originais?

Problema 4. Em uma coleção de 2021 moedas, 1010 são falsas, e têm um peso que difere do peso das moedas autênticas por 1 grama. Miriam Maneira tem uma balança que mostra a diferença de peso entre os objetos posicionados nos dois lados. Ela escolhe uma moeda qualquer, e quer saber se essa moeda é falsa ou autêntica através de uma única pesagem. É possível fazer isso?

Problema 5. É possível arranjar os números de 1 a 9 em sequência de tal forma que a quantidade de números entre 1 e 2 é ímpar, a quantidade de números entre 2 e 3 é ímpar, ..., e a quantidade de números entre 8 e 9 é ímpar?

Problema 6. Cada casa de um tabuleiro de xadrez 2018×2022 contém ou um 0 ou um 1, de tal forma que a quantidade de casas contendo 1 é ímpar em cada linha e em cada coluna. Prove que o número de casas brancas que contém 1 é par.

Observação: uma casa (i, j) (linha i e coluna j) é branca se i e j têm a mesma paridade.

Problema 7 (MOSP[1])**.** Seja X um conjunto finito de inteiros positivos, e seja A um subconjunto de X. Mostre que existe um subconjunto B de X tal que A é exatamente o conjunto de elementos de X que dividem uma quantidade ímpar de elementos de B.

[1] *Mathematical Olympiad Summer Program*, programa de treinamento dos alunos estadunidenses para a IMO.

Soluções

1. Suponhamos, por absurdo, que nenhuma das crianças está sentada entre dois meninos.

Enumeremos as crianças, de 1 a 50, no sentido horário. Crianças de números consecutivos são vizinhas e, além disso, a criança de número 50 é vizinha da criança de número 1.

Se uma criança está em uma posição ímpar, então suas duas vizinhas estão em posições pares consecutivas (considerando que 50 e 2 são posições pares consecutivas). Respectivamente, se uma criança está em uma posição par, então suas duas vizinhas estão em posições ímpares consecutivas (considerando que 49 e 1 são posições ímpares consecutivas). Dessa forma, a suposição que estamos fazendo equivale a dizer que não há dois meninos em posições pares consecutivas, nem dois meninos em posições ímpares consecutivas.

Se não há dois meninos em posições pares consecutivas (e 50 e 2 são posições pares consecutivas), então no máximo $\lfloor \frac{25}{2} \rfloor = 12$ das posições $(2, 4, \dots, 50)$ estão ocupadas por meninos.

Da mesma forma, se não há dois meninos em posições ímpares consecutivas (e 49 e 1 são posições ímpares consecutivas), então no máximo $\lfloor \frac{25}{2} \rfloor = 12$ das posições $(1, 3, \dots, 49)$ estão ocupadas por meninos.

Portanto, há no máximo $12 + 12 = 24$ meninos. Absurdo!

Como nossa hipótese implica um absurdo, concluímos que ela é falsa, isto é, que ao menos uma das crianças está sentada entre dois meninos.

2. Digamos que, após uma certa quantidade de tempo, o caracol tenha voltado ao seu ponto de origem. Chamemos de v a quantidade de vezes que ele andou na vertical e de h a quantidade de vezes que ele andou na horizontal.

Como o caracol voltou ao ponto de partida, ele deve ter andado para baixo a mesma quantidade de vezes que andou para cima. Assim, a quantidade de vezes que o caracol andou na vertical, v, é par. Da mesma forma, para ter retornado à origem, o caracol deve ter andado para a esquerda a mesma quantidade de vezes que andou para a direita. Logo, a quantidade de vezes que o caracol andou na horizontal, h, também é par.

Veja agora que, como o animal sempre faz um ângulo de 90°, as direções em que ele anda ficam alternando: se agora ele anda na vertical, daqui a 15 minutos andará na horizontal, depois na vertical novamente, e assim por diante. Dessa forma, v e h se relacionam de uma dentre três possíveis maneiras:

- se o caracol começa andando na vertical e termina andando na vertical, $v = h + 1$;
- se o caracol começa andando na vertical e termina andando na horizontal ou vice-versa, $v = h$;
- se o caracol começa andando na horizontal e termina andando na horizontal, $v = h - 1$.

Como v e h são ambos pares, só é possível que tenhamos $v = h$.

Logo, o caracol andou, ao todo, durante $15v + 15h = 15v + 15v = 30v$ minutos. Como v é par, $30v = 60k$ para algum inteiro k.

Portanto, o caracol andou durante uma quantidade inteira de horas.

3. Não.

Para facilitar a notação, nomeemos os gafanhotos: chamemo-los a, b e c. Além disso, classifiquemos os turnos: um turno será do tipo ab se o gafanhoto a tiver pulado sobre o gafanhoto b, um turno será do tipo bc se o gafanhoto b tiver pulado sobre o gafanhoto c, um turno será do tipo ac se o gafanhoto a tiver pulado sobre o gafanhoto c, etc. Por fim, denotemos por $\#(xy)$ a quantidade de turnos do tipo xy (isto é, $\#(ab)$ é a quantidade de turnos do tipo ab, etc).

Suponhamos que, após n turnos, os gafanhotos tenham voltado às suas posições originais. Isso implica que, se o gafanhoto a estava, originalmente, à frente do gafanhoto b, então após os n turnos o gafanhoto a está à frente do gafanhoto b. Para que isso tenha acontecido, o gafanhoto a deve ter pulado sobre o gafanhoto b tantas vezes quanto o gafanhoto b pulou sobre o gafanhoto a. Em outras palavras, $\#(ab) = \#(ba)$. De modo totalmente análogo, $\#(ac) = \#(ca)$ e $\#(bc) = \#(cb)$. Assim,

$$n = \#(ab) + \#(bc) + \#(ca) + \#(ac) + \#(cb) + \#(ba) = 2(\#(ab) + \#(bc) + \#(ca)).$$

Vê-se daí que n há de ser par.

Portanto, não é possível que os gafanhotos voltem às suas posições originais após 2021 turnos.

4. Sim; basta que Miriam distribua as outras 2020 moedas na balança, metade em cada lado. Vejamos por que isso funciona.

Seja p o peso em gramas de uma moeda autêntica. O peso, em gramas, de uma moeda falsa é $p \pm 1$. Digamos que, ao posicionar as 2020 moedas na balança, 1010 moedas em cada lado, Miriam tenha colocado a moedas falsas na esquerda e b moedas falsas na direita. Nesse cenário, a diferença de peso entre os dois conjuntos de moedas é

$$(1010p \pm a) - (1010p \pm b) = \pm(a - b).$$

Se a moeda escolhida é falsa, $a + b = 1009$, donde $b = 1009 - a$ e, portanto,

$$\pm(a - b) = \pm(a - 1009 + a) = \pm(2a - 1009)$$

é ímpar. Por outro lado, se a moeda escolhida é autêntica, $a + b = 1010$, donde $b = 1010 - a$ e, portanto,

$$\pm(a - b) = \pm(a - 1010 + a) = \pm(2a - 1010) = \pm 2(a - 505)$$

é par.

Assim, Miriam pode descobrir a autenticidade da moeda escolhida observando a paridade do número indicado pela balança.

5. Não.

Suponha, por absurdo, que os números estão ordenados de forma a respeitar as condições do enunciado. Enumeremos as posições, da esquerda para a direita, de 1 a 9.

Como há uma quantidade ímpar de números entre 1 e 2, esses dois números estão em posições de mesma paridade. Da mesma forma, 2 e 3 estão em posições de mesma paridade. Da mesma forma, 3 e 4 estão em posições de mesma paridade. Da mesma forma... Enfim, todos os 9 números estão em posições de mesma paridade. Absurdo!

Portanto, não é possível arranjar os inteiros de 1 a 9 de modo que a quantidade de números posicionados entre inteiros consecutivos seja sempre ímpar.

6. Denotemos por (i, j) a casa que se encontra na linha i e na coluna j. Além disso, para cada conjunto X de casas, denotemos por $S(X)$ a quantidade de casas de X que contêm 1.

Observe que

$$\big\{\text{casas brancas}\big\} = \big\{(i, j) \mid i \text{ e } j \text{ ímpares}\big\} \,\cup\, \big\{(i, j) \mid i \text{ e } j \text{ pares}\big\},$$

que

$$\big\{(i, j) \mid i \text{ e } j \text{ ímpares}\big\} = \big\{(i, j) \mid i \text{ ímpar}\big\} \setminus \big\{(i, j) \mid i \text{ ímpar e } j \text{ par}\big\},$$

e que

$$\{(i,j) \mid i \text{ e } j \text{ pares}\} = \{(i,j) \mid j \text{ par}\} \setminus \{(i,j) \mid i \text{ ímpar e } j \text{ par}\}.$$

Assim

$$\begin{aligned} S\big(\{\text{casas brancas}\}\big) &= S\big(\{(i,j) \mid i \text{ e } j \text{ ímpares}\}\big) \ + \ S\big(\{(i,j) \mid i \text{ e } j \text{ pares}\}\big) \\ &= S\big(\{(i,j) \mid i \text{ ímpar}\}\big) \ + \ S\big(\{(i,j) \mid j \text{ par}\}\big) \ - \ 2S\big(\{(i,j) \mid i \text{ ímpar e } j \text{ par}\}\big). \end{aligned}$$

Daí,

$$S\big(\{\text{casas brancas}\}\big)$$

tem a mesma paridade de

$$S\big(\{(i,j) \mid i \text{ ímpar}\}\big) \ + \ S\big(\{(i,j) \mid j \text{ par}\}\big).$$

Por um lado, há 1009 linhas ímpares no tabuleiro, cada uma das quais com uma quantidade ímpar de casas com o número 1. Logo, $S\big(\{(i,j) \mid i \text{ ímpar}\}\big)$ é ímpar.

Por outro lado, há 1011 colunas ímpares no tabuleiro, cada uma das quais com uma quantidade ímpar de casas com o número 1. Logo, $S\big(\{(i,j) \mid j \text{ par}\}\big)$ também é ímpar.

Desas forma, $S\big(\{(i,j) \mid i \text{ ímpar}\}\big) \ + \ S\big(\{(i,j) \mid j \text{ par}\}\big)$, uma soma de dois números ímpares, é par.

Portanto, $S\big(\{\text{casas brancas}\}\big)$ é par, isto é, a quantidade de casas brancas que possuem o número 1 é par.

7. Vamos construir, em vários passos, um conjunto B que tem as características desejadas.

Comecemos com $B = \emptyset$ e iteremos sobre os elementos de X, do maior ao menor, executando o seguinte procedimento: se um determinado elemento x não divide a paridade correta de números de B (isto é, se $x \in A$ e x divide uma quantidade par de números de B, ou se $x \notin A$ e x divide uma quantidade ímpar de números de B), adicionamos x a B; caso contrário, nada fazemos.

Ao final de todas as iterações (veja que X é finito), teremos construído o conjunto B desejado. Entendamos por que esse conjunto atende, de fato, a todas as exigências.

Veja que, ao final de cada iteração, temos certeza de o número x sob análise divide a paridade correta de elementos de B (se, antes da iteração, isso não acontecia, adicionamos x a B, o que faz com que a paridade de elementos de B que são divisíveis por x mude e, portanto, a condição passe a ser satisfeita; caso contrário, não fazemos nada, de modo que a condição continue a ser satisfeita). Além disso, em cada iteração, não influenciamos na paridade de elementos de B que cada um dos números analisados anteriormente divide. De fato, como estamos analisando os números do maior para o menor, nenhum dos números já analisados divide o número sob análise no momento. Dessa forma, ao terminarmos de analisar todos os números de X, teremos "consertado"as paridades para cada um deles e garantiremos, assim, que os números que dividem uma quantidade ímpar de elementos de B são exatamente os elementos de A.

Material elaborado por Valentino Amadeus Sichinel