

Contagens II

Neste material vamos dar continuidade ao que foi introduzido na aula anterior e aprenderemos novas técnicas relacionadas aos problemas de contagem.

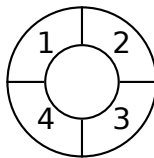
1. Separando em casos

Quando encontramos dificuldades em resolver um problema, uma estratégia útil é separá-lo em casos menores em que essas dificuldades diminuam. Essa ideia é tão significativa que os especialistas da ciência da computação nomearam-na de *divide and conquer algorithm*, em analogia às estratégias político-militares.

Problema 1. O alfabeto da Tanzunlândia é formado por apenas três letras: A , B e C . Uma palavra na Tanzunlândia é uma seqüência com no máximo 4 letras. Quantas palavras existem neste país?

Solução. Existem 3 palavras com uma letra, 3^2 com duas letras, 3^3 com três letras, e 3^4 com quatro letras. Logo, o total de palavras é $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$. $\square$

Problema 2. De quantos modos podemos pintar (usando uma de quatro cores) as casas da figura a baixo de modo que as casas vizinhas tenham cores diferentes?



Solução. Vamos separar o problema em dois casos:

- Se as casas 1 e 3 tiverem a mesma cor, temos quatro maneiras de escolher essa cor. Podemos escolher a cor da casa 2 de três maneiras (basta não ser a cor usadas nas casas 1 e 3), o mesmo vale para casa 4. Logo, temos $4 \times 3 \times 3 = 36$ maneiras de pintar dessa forma.

- ii. Agora se 1 e 3 têm cores diferentes, podemos escolher a cor da casa 1 de quatro maneiras, da casa 3 de três maneiras e, das casas 2 e 4, podemos escolher de duas maneiras cada. Assim, temos $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ maneiras de pintar desta outra forma.

Desse modo, podemos concluir que existem $36 + 48 = 84$ maneiras de pintar a rosquinha.

□

Problema 3. Quantos são os números de quatro dígitos que não possuem dois algarismos consecutivos com a mesma paridade?

Solução. Vamos separar o problema em dois casos:

- i. Quando o primeiro algarismo for par, temos 4 possibilidades para o primeiro dígito, 5 para o segundo, 5 para o terceiro e 5 para o último. Totalizando $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$ números.
- ii. Quando o primeiro algarismo for ímpar, temos 5 possibilidades para cada um dos dígitos. Logo, a quantidade de números dessa forma é $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$.

Portanto, temos um total de $625 + 500 = 1125$ números de quatro dígitos que não possuem dois algarismos consecutivos com a mesma paridade.

□

2. Contagens Múltiplas

Os problemas que abordamos até agora tinham algo em comum: o papel da ordenação na diferenciação das possibilidades. Porém, há casos em que a ordem dos elementos não é relevante para a contagem. Isso fica claro quando analisamos as seguintes situações:

Situação 1. De um grupo de 7 pessoas, devemos escolher 3 delas para formar um pódio (primeiro, segundo e terceiro lugares). De quantas formas podemos fazer isso?

Situação 2. De um grupo de 7 pessoas, devemos escolher 3 delas para formar um comitê (sem hierarquias). De quantas formas podemos fazer isso?

Perceba que, apesar de serem semelhantes, são problemas diferentes, com respostas também diferentes. O primeiro sabemos resolver. A resposta é $7 \times 6 \times 5 = 210$. Agora, sabendo a essa resposta podemos dar uma solução para o segundo problema.

Note que, para cada comitê formado, podemos montar $3 \times 2 \times 1 = 6$ pódios distintos. Logo, o número de pódios é seis vezes o número de comitês. Portanto, a resposta para o segundo problema é $\frac{210}{6} = 35$.

□

Podemos usar essa estratégia para resolver problemas de anagramas em que as palavras possuem letras repetidas.

Problema 4. Quantos anagramas possui a palavra *matematica* (desconsidere o acento)?

Solução. Se imaginarmos por um momento uma palavra de 10 letras diferentes:

$$m_1 a_1 t_1 e m_2 a_2 t_2 i c a_3,$$

o número total de anagramas será $10!$. Porém, ao trocarmos letras que na realidade são iguais (como a_1 e a_3) o anagrama continua o mesmo. Dessa forma, cada anagrama foi contado $2 \times 2 \times 3!$ vezes. Portanto, a resposta é $\frac{10!}{2 \times 2 \times 3!}$. $\square$

Problema 5. De quantas formas podemos por oito pessoas em uma fila se Alice e Bob devem estar juntos, e Carol deve estar em algum lugar atrás de Daniel?

Solução. Vamos imaginar Alice e Bob como uma única pessoa. Existirão $7! = 5040$ possibilidades. Alice pode estar na frente de Bob ou vice versa. Então devemos multiplicar o número de possibilidades por 2. Por outro lado, Carol está atrás de Daniel em exatamente metade dessas permutações, então a resposta é apenas 5040. $\square$

Problemas Propostos

Problema 6. Escrevem-se todos os inteiros de 1 a 9999. Quantos números têm pelo menos um zero?

Problema 7. Quantos números de três dígitos possuem todos os seus algarismos com a mesma paridade?

Problema 8. De quantas maneiras podemos colocar um rei preto e um rei branco em um tabuleiro de xadrez (8×8) sem que nenhum deles ataque o outro?

Problema 9. Na cidade Gótica as placas das motos consistem de três letras. A primeira letra deve estar no conjunto $\{C, H, L, P, R\}$, a segunda letra no conjunto $\{A, I, O\}$, e a terceira letra no conjunto $\{D, M, N, T\}$. Certo dia, decidiu-se aumentar o número de placas usando duas novas letras J e K . O intendente dos transportes ordenou que as novas letras fossem postas em conjuntos diferentes. Determine com qual opção podemos obter o maior número de placas.

Problema 10. Em uma festa havia 6 homens e 4 mulheres. De quantos modos podemos formar 3 pares como essas pessoas?

Problema 11. De quantas maneiras podemos por três torres de mesma cor em um tabuleiro 8×8 de modo que nenhuma delas ataque a outra?

Problema 12. (AIME 1996) Duas casas de um tabuleiro 7×7 são pintadas de amarelo e as outras são pintadas de verde. Duas pinturas são ditas *equivalentes* se uma é obtida a partir de uma rotação aplicada no plano do tabuleiro. Quantas pinturas inequivalentes existem?

Problema 13. Em uma sala de aula existem a meninas e b meninos. De quantas formas eles podem ficar em uma fila, se as meninas devem ficar em ordem crescente de peso, e os meninos também? (Suponha que 2 pessoas quaisquer não tenham o mesmo peso.)

Bibliografia Recomendada

Muitos dos exercícios propostos nesta aula foram retirados da página da Olimpíada Brasileira de Matemática (www.obm.org.br). Outros livros que também podem servir como apoio são:

1. **Mathematical Circles: Russian Experience** (Mathematical World, Vol. 7). Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia V. Itenberg.
2. **Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991** (Contests in Mathematics Series ; Vol. 1). Dmitry Fomin, Alexey Kirichenko.

Dicas e Soluções

6. Ache a quantidade de números de 0 a 9999 sem nenhum dígito zero. Faça essa contagem separando em quatro casos (de acordo com a quantidade de algarismos).
7. Separe em dois casos: 1) quando todos os dígitos são pares; 2) quando todos os dígitos são ímpares. Não se esqueça que zero não pode ser o primeiro dígito!
8. Podemos dividir o tabuleiro em três regiões: A primeira é formada pelas quatro casas nos cantos do tabuleiro; a segunda pelas 24 casas da borda (que não estão nos cantos); e a terceira pelo tabuleiro 6×6 no interior do tabuleiro. Se o primeiro rei for posto na primeira região, temos 60 maneiras de colocar o segundo rei; se ele for posto na segunda, temos 58 maneiras; e se for posto na terceira, temos 55 maneiras. Logo, temos um total de $4 \times 60 + 24 \times 58 + 36 \times 55 = 3612$ modos diferentes de colocar os dois reis.
9. Inicialmente temos $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ placas. De acordo com o problema, temos as seguintes opções para o novo número de placas: $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$, $5 \cdot 4 \cdot 5 = 100$ e $6 \cdot 3 \cdot 5 = 90$. Logo, o número máximo é 100.
10.
$$\frac{(6 \times 5 \times 4) \times (4 \times 3 \times 2)}{3!}.$$
11.
$$\frac{64 \times 49 \times 36}{3!}.$$
12. Separe o problema em dois casos. Quando as casas amarelas são simétricas em relação ao centro do tabuleiro e quando não são. Conte o número de pinturas equivalentes em cada caso.
13. Temos $(a + b)!$ maneiras de permutar todas as crianças. Porém apenas uma das $a!$ permutações das meninas está na ordem correta e apenas $b!$ das permutações dos meninos está correta. Logo, a resposta é $\frac{(a + b)!}{a!b!}$.