POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

Nível 2

Razões de segmentos

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problema 1. Sendo AS e AP bissetrizes dos ângulos internos e externos em A, determine o valor de CP, sabendo que $BS = 8$ e $CS = 6$.

Problema 2. Seja ABC um triângulo de lados a, b, c opostos aos vértices A, B, C, respectivamente. Se $D \in BC$ tal que AD é bissetriz interna, mostre que $BD = \frac{ac}{b+c}$ e $CD = \frac{ab}{b+c}$.

Problema 3. O incentro do triângulo ABC divide a bissetriz interna do ângulo A na razão $AI : ID = 2 : 1$. Mostre que os lados do triângulo estão em progressão aritmética

Problema 4. Num triângulo ABC, temos os comprimentos dos lados são: $AB = x - 1$, $BC = x$ e $AC = x + 1$, para algum inteiro x. Sabemos também que seu maior ângulo é o dobro do menor. Determine o valor de x.

Problema 5. Em um triângulo ABC, de lados $AB = 12$, $AC = 8$ e $BC = 10$, encontre o maior segmento que a bissetriz interna de A determina sobre BC.

Problema 6. (Círculo de Apolônio) Seja k um número real positivo, $k \neq 1$. Mostre que o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\frac{PA}{PB} = k$ é uma circunferência cujo centro pertence à reta AB.

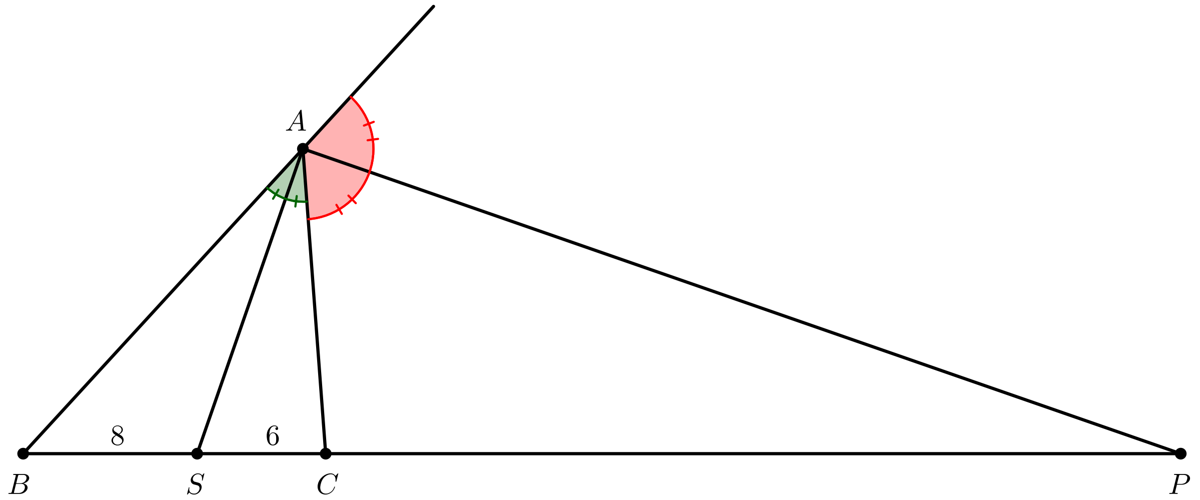
Problema 7. Seja ℓ a distância entre A e B. Para k real positivo, $k \neq 1$ considere o círculo de Apolônio de razão k, descrito no problema anterior. Mostre que o raio desse círculo é $\dfrac{k\ell}{|k^2 - 1|}$.

Problema 8. Em um triângulo ABC, $BC = 7$ e $\frac{AB}{AC} = 3$. Calcule o valor da altura relativa ao lado oposto ao vértice A sabendo que ela é máxima.

Problema 9. Em um triângulo ABC, $BC = 16$ e a altura relativa ao lado BC é 8. Calcule a razão $\frac{AB}{AC}$ sabendo que ela é máxima.

Soluções

1. .



Pelo teorema de bissetriz interna, temos

$$\frac{AC}{AB} = \frac{SC}{SB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Pelo teorema da bissetriz externa, temos

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CP}{BP} = \frac{CP}{CP + 14}.$$

Isto implica que

$$\frac{CP}{CP + 14} = \frac{3}{4},$$

donde obtemos que $4CP = 3CP + 42$, e, portanto, $CP = 42$.

2. Pelo teorema da bissetriz interna, temos

$$\frac{c}{b} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{BD}{a - BD}.$$

Então $b \cdot BD = ac - c \cdot BD$, o que implica $BD = \frac{ac}{b+c}$. Também obtemos $CD = a - BD = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}$

3. Como BI é bissetriz do $\angle ABD$, pelo teorema da bissetriz interna, temos que $\frac{AB}{BD} = \frac{AI}{ID} = 2$. Da mesma forma, como CI é bissetriz do $\angle ACD$, temos $\frac{AC}{CD} = 2$.

Assim, se denotamos $x = BD$ e $y = CD$, teremos que $AB = 2x$ e $AC = 2y$. Finalmente, note que

$$AC = 2y = x + y + y - x = BC + (y - x)$$

e que

$$BC = x + y = 2x + y - x = AB + (y - x).$$

4. Tracemos a bissetriz BD do $\angle ABC$. Usando o **Problema 2**, temos que

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{AB + BC} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1+x} = \frac{x^2-1}{2x-1}.$$

Vejamos agora que os triângulos ABD e ABC são semelhantes, pois $\angle BAD = \angle BAC$ (ângulo comum a ambos triângulos) e, além disso, como $\angle ABC = 2\angle ACB$, temos que $\angle ABD = \angle CBD = \angle ACB$. Então os lados de ambos triângulos se encontram na mesma proporção:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}.$$

Substituindo em função de x, obtemos

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{(x^2-1)/(2x-1)}{x-1} = \frac{x+1}{2x-1},$$

donde concluímos que $x = 0$ ou $x = 5$. Como x deve ser estritamente positivo, temos que $x = 5$.

5. Usando o **Problema 2**, encontramos

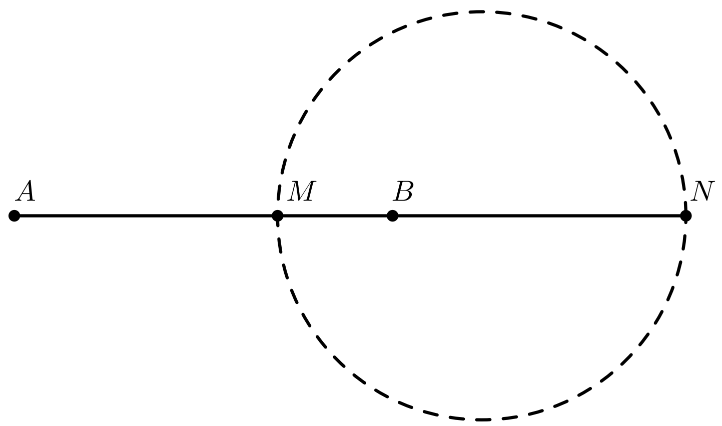
$$BD = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC} = \frac{12 \cdot 10}{20} = 6$$

e

$$CD == \frac{AC \cdot BC}{AB + AC} = \frac{8 \cdot 10}{20} = 4.$$

O maior desses segmentos é $BD = 6$.

6. Sejam M e N os conjugados harmônicos do segmento AB na razão k, isto é, os pontos pertencentes à reta AB tais que $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$. Vamos mostrar que o lugar geométrico dos pontos P tais que $\frac{PA}{PB} = k$ é a circunferência de diâmetro MN.



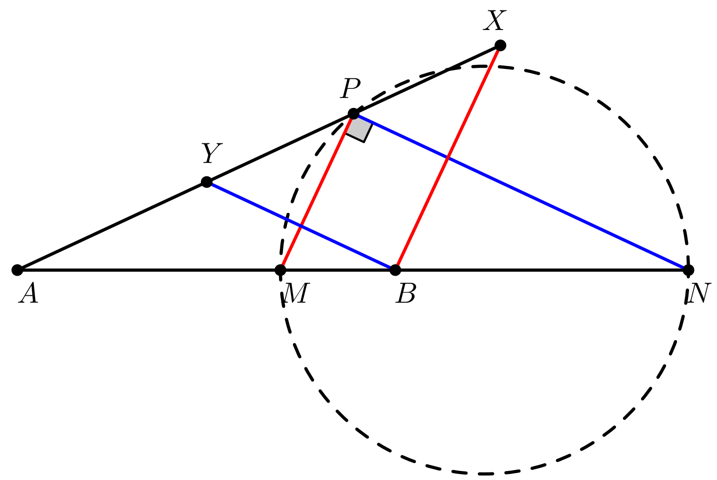
Na figura acima estamos considerando $k > 1$. Quando $k < 1$, os papéis de A e B se invertem e a análise é análoga.

Afirmação 1. Se P é tal que $\frac{PA}{PB} = k$ então P pertence à circunferência de diâmetro MN.

Demonstração. Seja P um ponto tal que $\frac{PA}{PB} = k$. Então $\frac{PA}{PB} = \frac{MA}{MB}$ e portanto, pela recíproca do teorema da bissetriz interna, temos que PM é bissetriz interna no triângulo PAB. Da mesma forma, da relação $\frac{PA}{PB} = \frac{NA}{NB}$ e da recíproca do teorema da bissetriz externa segue que PN é bissetriz externa no triângulo PAB. Como as bissetrizes interna e externa no ponto P do triângulo PAB são perpendiculares entre si concluímos que PM é perpendicular a PN e portanto P pertence à circunferência de diâmetro MN. $\square$

Afirmação 2. Se P pertence à circunferência de diâmetro MN então $\frac{PA}{PB} = k$.

Demonstração. Seja P um ponto pertencente à circunferência de diâmetro MN. Tracemos por B uma reta paralela à reta PM e chamemos de X a interseção dessa reta com a reta AP. Da mesma forma, tracemos por B uma reta paralela à reta PN e chamemos de Y a interseção dessa reta com a reta AP.

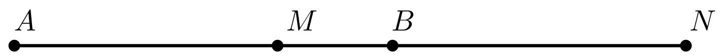


Pelo Teorema de Tales temos que

$$\frac{PA}{PX} = \frac{MA}{MB} = k \quad \text{e} \quad \frac{PA}{PY} = \frac{NA}{NB} = k,$$

donde segue que $PX = PY$. Sendo assim, no triângulo XBY, o qual é retângulo em B, temos que PB é mediana relativa à hipotenusa e portanto $PB = PX = PY$. Portanto, $\frac{PA}{PB} = \frac{PA}{PX} = k$. $\square$

7. Com a mesma notação da solução do exercício anterior, o raio do círculo de Apolônio é metade do segmento MN, onde M e N são tais que $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$.



A figura considera co caso em que $k > 1$. Se $k < 1$, basta inverter os papéis de A e B e considerar $k' = \frac{1}{k}$. Vamos considerar apenas o caso $k > 1$.

Note que

$$MN = MB + NB.$$

Vamos calcular cada parte separadamente.

Vamos usar que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$ sempre que os denominadores são não nulos.

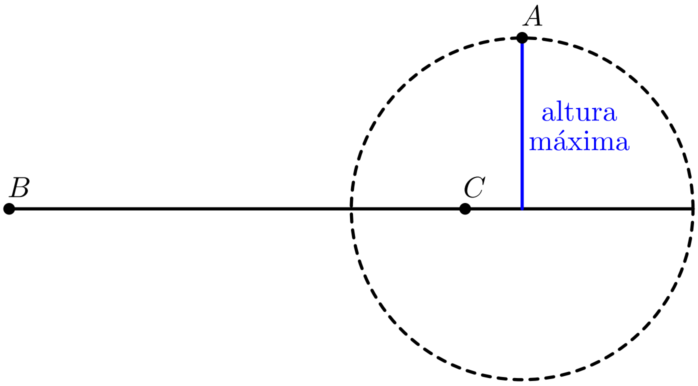
$$\frac{MA}{MB} = k \implies \frac{MA}{k} = \frac{MB}{1} = \frac{MA + MB}{k+1} = \frac{\ell}{k+1} \implies MB = \frac{\ell}{k+1}.$$
$$\frac{NA}{NB} = k \implies \frac{NA}{k} = \frac{NB}{1} = \frac{NA - NB}{k-1} = \frac{\ell}{k-1} \implies NB = \frac{\ell}{k-1}.$$

Com isso,

$$MN = \frac{\ell}{k+1} + \frac{\ell}{k-1} = \frac{2k\ell}{k^2-1}.$$

E portanto, o raio do círculo de Apolônio é $\dfrac{kl}{k^2-1}$.

8. O ponto A pertence ao círculo de Apolônio de razão $k = 3$ relativo aos pontos B e C, os quais estão a uma distância $\ell = 7$. A altura relativa ao vértice A é máxima quando ela coincide com o raio do círculo de Apolônio.



Portanto, pelo exercício anterior, no triângulo ABC, a altura máxima relativa ao vértice A é

$$\frac{k\ell}{|k^2-1|} = \frac{3 \times 7}{|3^2-1|} = \frac{21}{8}.$$

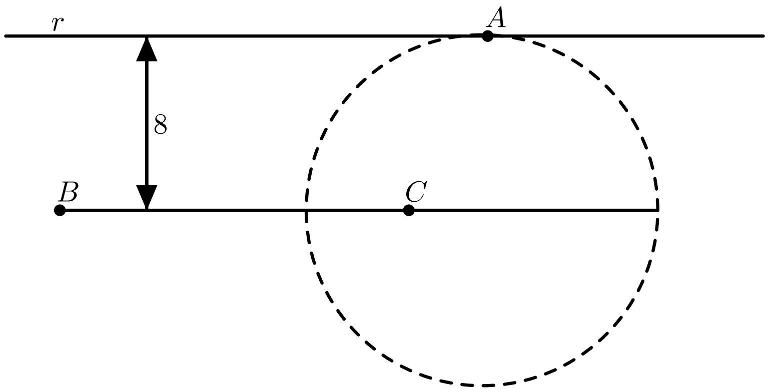
9. Como no triângulo ABC a altura relativa ao vértice A é 8, o ponto A pertence à reta r que é paralela a BC e dista 8 da reta BC.

Seja $k = \frac{AB}{AC}$, então A pertence ao círculo de Apolônio de razão k relativo aos pontos B e C, os quais estão a uma distância $\ell = 16$. Vamos chamar esse círculo de C_k. Queremos determinar o maior valor possível para a constante k.

Afirmação: Quando $k > 1$, o raio do círculo de Apolônio C_k, que é dado por $\frac{k\ell}{k^2-1}$, é uma função decrescente de k.

Demonstração. Basta ver que $\displaystyle \frac{k}{k^2-1} = \frac{k-1+1}{k^2-1} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k^2-1}$. □

Como A deve pertencer à interseção entre a reta r e o círculo C_k, temos que o maior k possível é o maior k para o qual essa interseção é não vazia. E isso ocorre quando a circunferência C_k tangencia a reta r. Nesse caso, A é esse ponto de interseção e o raio de C_k é igual a 8.



Portanto, o maior k possível satisfaz

$$\frac{16k}{k^2-1} = 8 \implies k = 1 + \sqrt{2}.$$

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández