

Divisibilidade I

Teorema 1. (*Algoritmo da Divisão*) Para quaisquer inteiros positivos a e b , existe um único par (q, r) de inteiros não negativos tais que $b = aq + r$ e $r < a$. Os números q e r são chamados de quociente e resto, respectivamente, da divisão de b por a .

Exemplo 2. Encontre um número natural N que, ao ser dividido por 10, deixa resto 9, ao ser dividido por 9 deixa resto 8, e ao ser dividido por 8 deixa resto 7.

O que acontece ao somarmos 1 ao nosso número? Ele passa a deixar resto 0 na divisão por 10, 9 e 8. Assim, um possível valor para N é $10 \cdot 9 \cdot 8 - 1$.

Exemplo 3. a) Verifique que $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$

b) Calcule o resto da divisão de 4^{2012} por 3.

Para o item a), usando a distributividade e efetuando os devidos cancelamentos no lado direito, podemos escrever:

$$a^n + a^{n-1} + \dots + a^2 + a - a^{n-1} - a^{n-2} - \dots - a - 1 = a^n - 1.$$

Para o item b), veja que $3 = 4 - 1$ e assim é natural substituir os valores dados na expressão do primeiro item:

$$4^{2012} - 1 = 3(4^{2011} + \dots + 4 + 1).$$

Isso significa que $q = (4^{2011} + \dots + 4 + 1)$ e que $r = 1$.

Observação 4. O teorema anterior admite um enunciado mais geral: Para quaisquer inteiros a e b , com $a \neq 0$, existe um único par de inteiros (q, r) tais que $b = aq + r$, $0 \leq r < |a|$. Por exemplo, o resto da divisão de -7 por -3 é 2 e o quociente é 3.

Iremos agora estudar propriedades a respeito das operações com restos.

Teorema 5. (*Teorema dos Restos*) Se b_1 e b_2 deixam restos r_1 e r_2 na divisão por a , respectivamente, então:

$b_1 + b_2$ deixa o mesmo resto que $r_1 + r_2$ na divisão por a
 $b_1 b_2$ deixa o mesmo resto que $r_1 r_2$ na divisão por a .

Demonstração. Por hipótese, existem q_1, q_2 e q tais que: $b_1 = aq_1 + r_1$, $b_2 = aq_2 + r_2$ e $r_1 + r_2 = aq + r$, logo:

$$b_1 + b_2 = a(q_1 + q_2 + q) + r.$$

Como $0 < r < |a|$, $b_1 + b_2$ deixa resto r quando dividido por a . A demonstração para o produto é deixada ao cargo do leitor. \square

Observação 6. Em alguns casos, é preferível que o professor faça uma demonstração do resultado anterior para $a = 3$ ou $a = 5$ apenas com o intuito de deixar os alunos mais confortáveis a respeito do resultado. É preferível que mais tempo seja gasto resolvendo exemplos e problemas. Na seção de congruências, os alunos terão um contato mais apropriado com o enunciado anterior.

Exemplo 7. Qual o resto que o número $1002 \cdot 1003 \cdot 1004$ deixa quando dividido por 7?

Como 1002 deixa resto 1 por 7, o número acima deixa o mesmo resto que $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ por 7.

Exemplo 8. Qual o resto que o número 4^{5000} deixa quando dividido por 3?

Como 4 deixa resto 1 por 3, 4^{5000} deixa o mesmo resto que $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{5000} = 1$ por 3.

Exemplo 9. Qual o resto que o número 2^{2k+1} deixa quando dividido por 3?

Note que 2^0 deixa resto 1 por 3, 2^1 deixa resto 2 por 3, 2^2 deixa resto 1 por 3, 2^3 deixa resto 2 por 3, 2^4 deixa resto 1 por 3. Precebeu alguma coisa? Como 100 é par, o resto deverá ser 1. Como 2^2 deixa resto 1, então $2^{2k} = \underbrace{2^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^2}_k$ deixa o mesmo resto que $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_k = 1$ e $2^{2k+1} = 2^{2k} \cdot 2$ deixa o mesmo resto que $1 \cdot 2 = 2$ por 3.

Exemplo 10. Qual o resto de $n^3 + 2n$ na divisão por 3?

Se o resto de n por 3 é r , o resto de $n^3 + 2n$ é o mesmo de $r^3 + 2r$. Para $r = 0$, esse resto seria 0. Para $r = 1$, seria o mesmo resto de 3 que é 0. Finalmente, para $r = 2$, o resto seria o mesmo de $8 + 4 = 12$ que também é 0. Assim, não importa qual o resto de n por 3, o número $n^3 + 2n$ sempre deixará resto 0. Uma ideia importante nessa solução foi dividi-la em casos. Também poderíamos ter resolvido esse exemplo apelando para alguma fatoração:

$$n^3 + 2n = n^3 - n + 3n = n(n^2 - 1) + 3n = n(n - 1)(n + 1) + 3n.$$

Como $n - 1, n$ e $n + 1$ são consecutivos, um deles é múltiplo de 3. Assim, o último termo da igualdade anterior é a soma de dois múltiplos de 3 e consequentemente o resto procurado é 0.

Observação 11. *Fatorações podem ser muito úteis para encontrarmos os valores explícitos de q e r .*

Exemplo 12. *Prove que, para cada n natural,*

$$(n+1)(n+2)\dots(2n)$$

é divisível por 2^n .

Veja que

$$(n+1)(n+2)\dots(2n) = \frac{1 \cdot 2 \cdots 2n}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

Para cada número natural k no produto escrito no denominador, temos uma aparição de $2k$ no produto escrito no numerador. Basta efetuarmos os cancelamentos obtendo:

$$(n+1)(n+2)\dots(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1).$$

Exemplo 13. *(Olimpíada de Leningrado 1991) Cada um dos naturais a, b, c e d é divisível por $ab - cd$, que também é um número natural. Prove que $ab - cd = 1$.*

Se chamarmos $p = ab - cd$, teremos $a = px, b = py, c = pz$ e $d = pt$ onde x, y, z e t são inteiros. Assim, $p = p^2(xy - zt)$. Consequentemente $1 = p(xy - zt)$ e concluímos que $p = 1$, pois p é natural.

Exemplo 14. *A soma digital $D(n)$ de um inteiro positivo n é definida recursivamente como segue:*

$$D(n) = \begin{cases} n & \text{se } 1 \leq n \leq 9, \\ D(a_0 + a_1 + \dots + a_m) & \text{se } n > 9, \end{cases}$$

onde a_0, a_1, \dots, a_m são todos os dígitos da expressão decimal de n na base 10, i.e.,

$$n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0$$

Por exemplo, $D(989) = D(26) = D(8) = 8$. Prove que: $D((1234)n) = D(n)$, para $n = 1, 2, 3 \dots$

Como $10^n - 1 = (10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1)$, podemos concluir que 10^n sempre deixa resto 1 na divisão por 9. Assim, $n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0$, deixa o mesmo resto que $a_m + a_{m-1} + \dots + a_0$ na divisão por 9. Desse modo, $D(n)$ nada mais é do que o resto na divisão por 9 do número n . Como 1234 deixa resto 1 por 9, o número $(1234)n$ deixa o mesmo resto que $1 \cdot n$ por 9, ou seja, $D((1234)n) = D(n)$.

Observação 15. *O exemplo anterior contém o critério de divisibilidade por 9, i.e., n deixa o mesmo resto que $D(n)$ na divisão por 9. O critério de divisibilidade por 3 é análogo pois 10^n também sempre deixa resto 1 por 3.*

Exemplo 16. *Encontre todos os pares de inteiros positivos a e b tais que $79 = ab + 2a + 3b$.*

Fatoremos a expressão anterior. Somando 6 aos dois lados da equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 85 &= 6 + ab + 2a + 3b \\ &= (3 + a)(2 + b) \end{aligned}$$

Assim, $(3 + a)$ e $(2 + b)$ são divisores positivos de 85 maiores que 1. Os únicos divisores positivos de 85 são 1, 5, 17, 85. Logo, os possíveis pares de valores para $(3 + a, 2 + b)$ são $(5, 17)$ ou $(17, 5)$ que produzem as soluções $(a, b) = (2, 15)$ e $(14, 3)$.

Problema 17. (Olimpíada Russa) Prove que se $\frac{2^n - 2}{n}$ é um inteiro, então $\frac{2^{2^n - 1} - 2}{2^n - 1}$ também é um inteiro.

Se $k = \frac{2^n - 2}{n}$, então

$$\begin{aligned} \frac{2^{2^n - 1} - 2}{2^n - 1} &= \frac{2(2^{2^n - 2} - 1)}{2^n - 1} \\ &= 2 \left(\frac{2^{nk} - 1}{2^n - 1} \right) \\ &= 2 \left(\frac{(2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \dots + 2^n + 1)}{2^n - 1} \right) \\ &= 2(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \dots + 2^n + 1), \end{aligned}$$

é um número inteiro.

Problemas Propostos

Problema 18. Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.

Problema 19. Determinar os números que divididos por 17 dão um resto igual ao quadrado do quociente correspondente.

Problema 20. (OCM 1985) Encontre o quociente da divisão de $a^{128} - b^{128}$ por

$$(a^{64} + b^{64})(a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)$$

Problema 21. (OCM 1994) Seja $A = 777 \dots 77$ um número onde o dígito "7" aparece 1001 vezes. Determinar o quociente e o resto da divisão de A por 1001.

Problema 22. Encontre um inteiro que deixa resto 4 na divisão por 5 e resto 7 na divisão por 13

Problema 23. Encontre o menor inteiro que, dividido por 29 deixa resto 5, e dividido por 31 dá resto 28.

Problema 24. Prove que, para todo inteiro positivo n o número $n^5 - 5n^3 + 4n$ é divisível por 120.

Problema 25. (Fatorações Importantes)

a) Seja $S = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1}$. Veja que $S + z^n = 1 + zS$ então $S(z-1) = z^n - 1$. Conclua que, para quaisquer x e y vale:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

b) Mostre que se n é ímpar vale:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Problema 26. Prove que, o número $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$ é múltiplo de 5.

Problema 27. Mostre que o número $1^n + 8^n - 3^n - 6^n$ é múltiplo de 10 para todo natural n .

Problema 28. Encontre o resto da divisão $37^{10} - 1$ por 11.

Problema 29. Prove que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é divisível por 7.

Problema 30. Encontre o último dígito do número 1989^{1989} .

Problema 31. Mostre que se n divide a então $2^n - 1$ divide $2^a - 1$.

Problema 32. (Cone Sul 1996) Provar que o número

$$\frac{1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1}{1996^2}$$

é um inteiro.

Problema 33. Mostre que para n ímpar, n divide $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$

Problema 34. Existe um natural n tal que $n^n + (n+1)^n$ é divisível por 2011?

Problema 35. Quantos números inteiros positivos n existem tais que $n+3$ divide $n^2 + 7$?

Problema 36. Encontre o número de inteiros n tais que

1. $1000 < n < 8000$.

2. $n^{n+1} + (n+1)^n$ é divisível por 3.

Problema 37. Sejam m e n naturais tais que $mn + 1$ é múltiplo de 24, mostre que $m + n$ também é múltiplo de 24.

Problema 38. (Irlanda 1997) Encontre todos os pares de inteiros (x, y) tais que $1 + 1996x + 1998y = xy$.

Dicas e Soluções

18. Os números são $\{0, 8, 16, 24, \dots, 8 \cdot 7\}$.
18. Escreva $n = 17q + q^2$ e note que $0 \leq q^2 < 17$. Assim, $q = 0, 1, 2, 3, 4$.
19. Use a diferença de quadrados sucessivas vezes para obter $(a - b)$ como quociente.
21. O número do problema é igual a $\frac{7(10^{1001}-1)}{9}$. Além disso, $\frac{10^{999}+1}{10^3+1}$ é inteiro e $\frac{10^{1001}-1}{10^3+1} = 100 \cdot \frac{10^{999}+1}{10^3+1} - \frac{100}{10^3+1}$.
22. Os números que satisfazem essa propriedade são os números da forma $65k + 59$.
24. Basta mostrar que $n^5 - 5n^3 + 4n$ é múltiplo de 3, 8 e 5. Na divisão por 5, temos quatro restos possíveis: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Assim, o número $n^5 - 5n^3 + 4n$ possui o mesmo resto na divisão por 5 que um dos cinco números: $\{0^5 - 5 \cdot 0^3 + 40, 1^5 - 5 \cdot 1^3 + 4, 2^5 - 5 \cdot 2^3 + 8, 3^5 - 5 \cdot 3^3 + 12, 4^5 - 5 \cdot 4^3 + 16\}$. Como todos esses números são múltiplos de 5, segue que $n^5 - 5n^3 + 4n$ é múltiplo de 5 para todo n inteiro. O procedimento com 3 e 8 é semelhante.
25. Para o item a), troque z por $\frac{x}{y}$. Para o item b), substitua y por $-y$ no item anterior.
26. Pelo problema anterior, como 99 é ímpar temos: $1^{99} + 4^{99} = (1 + 4)(1^{98} + 1^{97} \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 4^{97} + 4^{98})$. Daí, segue que $1^{99} + 4^{99}$ é múltiplo de 5. Analogamente podemos mostrar que $2^{99} + 3^{99}$ é múltiplo de 5.
27. O número em questão é múltiplo de 2 pois é a soma de dois ímpares e dois pares. Para ver que também é múltiplo de 5, basta notar que 5 divide $1^n - 6^n$ e $8^n - 3^n$. Isso pode ser facilmente mostrado usando a fatoração do exercício 25.
31. Se $a = nk$, temos $(2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \dots + 2^n + 1) = 2^{nk} - 1$.
32. Veja que $1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1 = 1995 \cdot (1997^{1996} - 1) - 1996 \cdot (1997^{1995} - 1)$. Pela fatoração de $x^n - y^n$,

$$\frac{1996 \cdot (1997^{1995} - 1)}{1996^2} = (1997^{1994} + 1997^{1993} + \dots + 1),$$

é inteiro. Além disso, pela mesma fatoração,

$$\frac{1995 \cdot (1997^{1996} - 1)}{1996^2} = 1995 \cdot \left(\frac{1997^{1995} - 1}{1996} + \frac{1997^{1994} - 1}{1996} + \dots + \frac{1997 - 1}{1996} + \frac{1996}{1996} \right),$$

é uma soma de números inteiros.

33. Como n é ímpar,

$$(n - i)^n + i^n = ((n - i) + i)((n - i)^{n-1} - (n - i)^{n-2}i + \dots - (n - i)i^{n-2} + i^{n-1}).$$

34. Faça $n = 1005$ e use a fatoração de $x^n + y^n$.

37. Fatore a expressão como:

$$(x - 1998)(y - 1996) = xy - 1998y - 1996x + 1998 \cdot 1996 = 1997^2.$$

Os divisores de 1997^2 são $\{\pm 1, \pm 1997, \pm 1997^2\}$. Resolvendo os sistemas correspondentes à essas possibilidades, temos: $(x, y) = (1999, 1997^2 + 1996), (1997, -1997^2 + 1996), (3995, 3993), (1, -1), (1997^2 + 1998, 1997), (-1997^2 + 1998, 1995)$.

Referências

- [1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.
- [2] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.
- [3] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.
- [4] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.
- [5] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.
- [6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.

Teoria dos Números 01 - Divisibilidade

Problema 1. O dígito das unidades de um quadrado de um inteiro é 9 e o dígito das dezenas desse quadrado é 0. Prove que o dígito das centenas é par.

Solução. Seja n esse inteiro. Então temos $n^2 = 100k + 9$, onde $k \in \mathbb{N}$. Note que o dígito das centenas é par se, e somente se, k é par. Logo, devemos mostrar que k é par.

Suponha que $n = 10A + B$, onde A é um inteiro qualquer e B é um algarismo na base 10. Dessa forma, $100k + 9 = 10A^2 + 20AB + B^2$ e, portanto, $B^2 - 9$ é múltiplo de 10. Como $0 \leq B \leq 9$, os possíveis valores de B são 3 e 7.

Se $B = 3$, então

$$\begin{aligned} 100k + 9 = 100A^2 + 60A + 9 &\iff 5k = 5A^2 + 3A \\ &\iff 5k = A(5A + 3). \end{aligned}$$

Veja que, independentemente da paridade de A , o termo $A(5A + 3)$ é sempre par e portanto k é par.

Agora, se $B = 7$, então

$$\begin{aligned} 100k + 9 = 100A^2 + 140A + 49 &\iff 5k = 5A^2 + 7A + 2 \\ &\iff 5k = A(5A + 7) + 2. \end{aligned}$$

Analogamente, k é par.

Problema 2. Qual o menor natural que deixa resto 4 na divisão por 7 e resto 10 na divisão por 13?

Solução. Seja n um natural satisfazendo essas condições. Então $n + 3$ deve ser divisível por 7 e por 10. O menor valor de n é $\text{mmc}(10, 7) - 3 = 70 - 3 = 67$.

Problema 3. Qual o menor múltiplo de 5 que deixa resto 2 quando dividido por 3 e por 4?

Solução. Se x é um múltiplo de 5 que satisfaz estas condições então devemos ter $x = 3m + 2 = 4n + 2$, para m e n inteiros positivos. De forma que $3m = 4n$. Concluímos que $m = 4t$ e $n = 3t$, para algum t . Com isso, $x = 12t + 2$. O menor múltiplo de 5 desta forma é $50 = 12 \cdot 4 + 2$.

Problema 4. Qual o resto de 2^{n^3+2n} na divisão por 7?

Solução. Note que $n^3 + 2n = n(n+1)(n+2) - 3n^2$. Como n , $n+1$ e $n+2$ são consecutivos, um deles é múltiplo de 3. Assim, $n^3 + 2n$ será sempre divisível por 3. Sendo assim, escrevamos

$n^3 + 2n = 3m$. Queremos saber o resto de 2^{3m} na divisão por 7. Observando que $2^{3m} = 8^m$ e que $8^m - 1 = (8 - 1)(8^{m-1} + \dots + 8 + 1)$, concluímos que o resto procurado é 1.

Problema 5. Qual o resto de $\frac{4^{2015} - 1}{3}$ na divisão por 3?

Solução. Primeiramente note que 4^n deixa mesmo resto que $1^n = 1$ para todo n natural. Além disso, sabemos que

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1).$$

Portanto, $\frac{4^{2015} - 1}{3}$ deixa o mesmo resto que

$$4^{2014} + 4^{2013} + \dots + 4 + 1$$

que por sua vez deixa o mesmo resto que

$$1 + 1 + \dots + 1 + 1 = 2015$$

Portanto, o resto é o mesmo que o de 2015 na divisão por 3 e é igual a 2.

Problema 6. Qual é o último dígito do número 2015^{2015} ?

Solução. O último dígito é igual ao resto que o número deixa na divisão por 10. Portanto, o último dígito de 2015^{2015} é o mesmo que o de 5^{2015} . Toda potência de 5 deixa resto 5 na divisão por 10, logo o dígito que procuramos é 5.

Problema 7. Encontre o algarismo das unidades do número $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 97 \times 99$.

Solução. Queremos o resto na divisão por 10. O resto é igual ao do número

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 1 \times \dots \times 7 \times 9 = (1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9)^{10}.$$

Temos $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = 945$ que deixa resto 5. Sendo assim, o resto que queremos é o mesmo que 5^{10} que é 5.

Problema 8. Quais são os possíveis restos na divisão de $n! + 13$ na divisão por 5?

Solução. Vamos analisar os casos:

- i. Se $n = 1$ então $n! + 13 = 14$ que deixa resto 4;
- ii. Se $n = 2$ temos $n! + 13 = 15$ que deixa resto 0;

iii. Se $n = 3$, $n! + 13 = 19$ e o resto é 4;

iv. Para $n = 4$ temos $n! + 13 = 37$ com resto 2;

v. Para $n \geq 5$, $n! + 13$ deixa mesmo resto que $0 + 13$, isto é, 3.

Finalmente, os possíveis restos são 0, 2, 3 e 4

Problema 9. Encontra o resto de 6^{2009} na divisão por 37.

Solução. Note que 6^2 deixa resto -1 na divisão por 37. Logo, 6^4 deixa resto 1. Dessa forma, $6^{2009} = (6^4)^{502} \cdot 6$ deixa o mesmo resto que $1^{502} \cdot 6 = 6$.

Problema 10. Encontre todos os pares de inteiros a e b tais que $22 = ab + 3a - b$.

Solução. Perceba que

$$22 = ab + 3a - b \iff 19 = (a - 1)(b + 3).$$

Como 19 é primo, devemos ter $a - 1 = 19$ e $b + 3 = 1$ ou $a - 1 = 1$ e $b + 3 = 19$ ou $a - 1 = -1$ e $b + 3 = -19$ ou $a - 1 = -19$ e $b + 3 = -1$. Isso nos dá as soluções $(a; b) = (20; -2), (2; 16), (0; -22), (-18; -4)$.