POTI
POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

Nível 2

Relações métricas no triângulo

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problema 1. (OCM) Se as diagonais de um quadrilátero (convexo) são perpendiculares, prove que as somas dos quadrados dos lados opostos são iguais.

Problema 2. (OCM) Dobra-se um pedaço de arame de 32 cm de comprimento formando um triângulo isósceles de 12 cm de base. Calcule a medida do comprimento da bissetriz do ângulo oposto à base.

Problema 3. (OBM) P é um ponto interior a um quadrado $ABCD$. As distâncias de P aos vértices A e D e ao lado BC são iguais a 10 cm. Encontre o comprimento do lado do quadrado.

Problema 4. Num triângulo com ângulos iguais a $90°$, $60°$ e $30°$, o cateto oposto ao ângulo de $30°$ mede a metade da medida de hipotenusa.

Problema 5. Um ponto P, interno de um ângulo de $60°$, está a uma distância de 6 e 9 dos lados desse ângulo. Qual a distância entre P e a bissetriz do ângulo?

Problema 6. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1. Sejam E e F pontos nos lados BC e CD, respectivamente, tais que $\angle DAF = \angle BAE = 15°$.

a) Mostre $\triangle AEF$ é equilátero.

b) Encontre o comprimento de BE.

c) Deduza $\tan 15°$ e $\tan 75°$.

Problema 7. Seja ABC um triângulo tal que $\angle ABC = 45°$. Seja D o ponto sobre o segmento BC tal que $2BD = CD$ e $\angle DAB = 15°$. Determine o ângulo $\angle ACB$.

Problema 8. (AIME) Seja ABC um triângulo tal que $AB = 13$, $BC = 15$ e $CA = 14$. Seja D o ponto do segmento BC tal que $CD = 6$. Seja E o ponto de BC tal que $CE > CD$ e $\angle BAE = \angle CAD$. Determine BE.

Problema 9. No triângulo ABC, $\angle ABC = 20°$ e $AB = AC$. Os pontos M e N estão sobre os lados AB e AC, respectivamente, e são tais que $\angle BCM = 50°$ e $\angle CBN = 60°$. Calcule a medida do ângulo $\angle MNB$.

Soluções

1. Chamemos de A, B, C e D, os vértices do quadrilátero, e chamemos de P o ponto de interseção das suas diagonais (AC e BD).

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle ABP$, $\triangle DCP$, $\triangle ADP$ e $\triangle BCP$, temos

$$AB^2 + DC^2 = (AP^2 + BP^2) + (CP^2 + DP^2) = (AP^2 + DP^2) + (CP^2 + BP^2) = AD^2 + BC^2.$$

2. Chamemos de A, B e C os vértices do triângulo isósceles formado pelo arame dobrado. Seja BC a base do triângulo. Temos então $BC = 12$ cm e $AB = AC = 10$ cm. Seja D em BC tal que AD é bissetriz do $\angle BAC$. Queremos calcular o comprimento de AD.

Como $\triangle ABC$ é isósceles, AD também será altura e mediana do triângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ADC$, obtemos

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 = 10^2 - 6^2 = 64.$$

Logo $AD = 8$ cm.

3. Seja E o pé da perpendicular traçada desde P até o lado BC. Seja F a interseção da reta EP com o segmento AD.

Chamemos de x o comprimento do lado do quadrado. Veja que $PE = 10$ cm e $PF = x - 10$ cm. Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle DFP$, obtemos

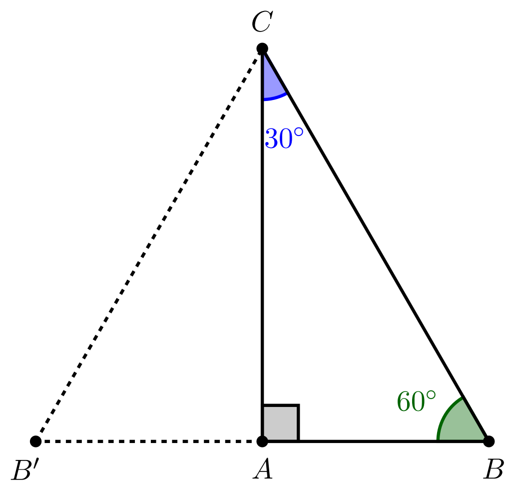
$$(x-10)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 10^2.$$

O que implica que

$$5x^2 - 80x = 0.$$

Logo $x = 0$ ou $x = 16$. Como x é estritamente positivo, obtemos que o comprimento do lado do quadrado é 16 cm.

4. Sejam A, B e C os vértices correspondentes aos ângulos de $90°$, $60°$ e $30°$, respectivamente. Prolongamos o cateto AB e marcamos o ponto B' tal que A é ponto médio de BB', como mostra a figura.



Os triângulos ABC e $AB'C$ são congruentes e, como $\angle CBB' = \angle CB'B = 60°$, temos que $\triangle BB'C$ é equilátero. Assim, temos que CA é altura, bissetriz e mediana do $\triangle BB'C$. Logo

$$BC = BB' = 2 \cdot AB.$$

Perceba que essa construção demonstra que $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$. Com essa mesma construção e o teorema de Pitágoras também se mostra que $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Chamemos de A o vértice do ângulo de $60°$, e sejam B e C, respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas a partir de P até os lados do ângulo, tal que $PB = 6$ e $PC = 9$. Chamemos de Q o pé da perpendicular traçada desde P até a bissetriz do $\angle BAC$. Queremos encontrar o comprimento de PQ. Vamos denotar $PQ = x$.

Sejam E e F, respectivamente, os pontos de encontro da bissetriz AQ com as retas BP e CP. Note que $\angle AEB = 180° - (\angle ABE + \angle BAE) = 180° - (90° + 30°) = 60°$. E, analogamente, $\angle AFC = 60°$.

Então temos que $\triangle EFP$ é equilátero. Sua altura, PQ é igual a x. Chamando de a o comprimento do lado desde triângulo, e usando Pitágoras em $\triangle FPQ$, obtemos

$$x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2.$$

Donde concluímos que $a = \frac{2}{\sqrt{3}}x$. Agora, note que os triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle ACF$ são retângulos com um ângulo igual a $30°$ e o outro igual a $60°$. Então, usando o problema anterior, temos que

$$AE = 2 \cdot BE = 2 \cdot \left(6 + \frac{2}{\sqrt{3}}x\right) = 12 + \frac{4}{\sqrt{3}}x$$

e

$$AF = 2 \cdot FC = 2 \cdot (PC - PF) = 2 \cdot \left(9 - \frac{2}{\sqrt{3}}x\right) = 18 - \frac{4}{\sqrt{3}}x.$$

Por último, como $AF = AE - FE$, temos

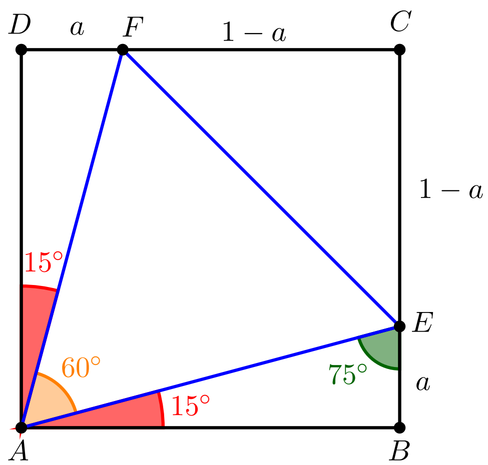
$$18 - \frac{4}{\sqrt{3}}x = 12 + \frac{4}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}x = 12 + \frac{2}{\sqrt{3}}x,$$

donde concluímos que $x = \sqrt{3}$.

6.

(a) Como $\angle BAE = \angle DAF$ e $AB = AD$, pelo critério a.l.a. temos que $\triangle ABE \equiv \triangle ADF$. Assim, $\triangle AFE$ é isósceles e como $\angle EAF = 60°$, concluímos que $\triangle AEF$ é equilátero.

(b) Chamemos de a o comprimento dos segmentos $BE = DF$, logo o comprimento dos segmentos $CE = CF$ é igual a $1 - a$.



Usando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABE$ temos

$$AE^2 = a^2 + 1^2.$$

Usando o teorema de Pitágoras no $\triangle CEF$, temos

$$EF^2 = (1-a)^2 + (1-a)^2.$$

Como $AE = EF$, temos

$$a^2 + 1 = 2(1-a)^2.$$

Resolvendo esta equação, encontramos as soluções $2 \pm \sqrt{3}$. Como devemos ter $a < 1$, concluímos que $a = 2 - \sqrt{3}$.

c) Para responder este item, vamos olhar para o $\triangle ABE$:

$$\begin{aligned} \tan(15^\circ) &= \frac{BE}{AB} = 2 - \sqrt{3} \\ \tan(75^\circ) &= \frac{AB}{BE} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

7. Usaremos a fórmula do seno da soma:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cos\alpha.$$

No $\triangle ACD$, temos

$$\angle ADC = \angle BAD + \angle ABD = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$$

e que

$$\angle CAD = 180^\circ - \angle ADC - \angle ACD = 120^\circ - \angle ACB.$$

Logo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\angle CAD &= \operatorname{sen}(120^\circ - \angle ACB) \\ &= \operatorname{sen} 120^\circ \cos\angle ACB - \operatorname{sen}\angle ACB \cos 120^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle ACB - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\angle ACB. \end{aligned}$$

Aplicando a Lei dos senos no $\triangle ABD$, temos

$$\frac{BD}{AD} = \frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ}.$$

Aplicando a Lei dos senos no $\triangle ACD$, e usando que $CD = 2BD$, temos

$$\frac{2BD}{AD} = \frac{CD}{AD} = \frac{\operatorname{sen}\angle CAD}{\operatorname{sen}\angle ACB}.$$

Concluímos então que

$$\frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cos\angle ACB + \operatorname{sen}\angle ACB}{4\operatorname{sen}\angle ACB} = \frac{\sqrt{3}}{4\tan\angle ACB} + \frac{1}{4}.$$

Como $\operatorname{sen}(15^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$, na equação acima, temos

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4\tan\angle ACB} + \frac{1}{4}.$$

Donde obtemos que $\tan\angle ACB = 2 + \sqrt{3}$. Usando o exercício anterior, concluímos que $\angle ACB = 75^\circ$.

8. Aplicando a Lei dos senos nos triângulos BAE e BAD, usando que $\angle BAE = \angle CAD$, e posteriormente aplicando Lei dos senos nos triângulos d e d, temos

$$\begin{aligned}\frac{BE \cdot BD}{AB^2} &= \frac{\operatorname{sen} \angle BAE}{\operatorname{sen} \angle AEB} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle BAD}{\operatorname{sen} \angle ADB} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \angle CAD}{\operatorname{sen} \angle AEC} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle CAE}{\operatorname{sen} \angle ADC} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \angle CAD}{\operatorname{sen} \angle ADC} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle CAE}{\operatorname{sen} \angle AEC} \\ &= \frac{CD \cdot CE}{AC^2}.\end{aligned}$$

Então

$$\frac{CE}{BE} = \frac{AC^2}{AB^2} \cdot \frac{BD}{CD}.$$

Substituindo os valores conhecidos, encontramos a equação para BE:

$$\frac{15 - BE}{BE} = \frac{14^2}{13^2} \cdot \frac{9}{6},$$

cuja solução é $BE = \frac{2535}{463}$.

9. Apresentaremos duas soluções:

Problema 9 - Solução 1 - Usando Trigonometria

Usaremos algumas identidades úteis. Das clássicas:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \qquad (1) \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a\end{aligned}$$

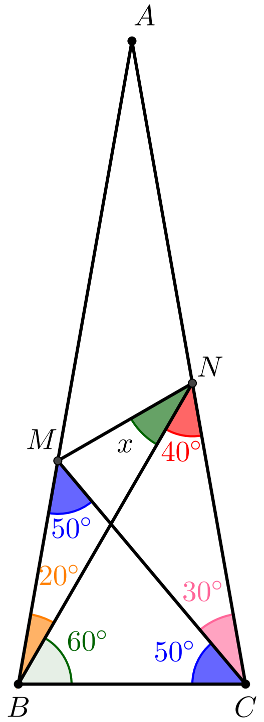
se deduz que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \operatorname{sen} a \cos b \qquad (2) \\ \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \operatorname{sen} b \cos a\end{aligned}$$

E fazendo $u = a + b$ e $v = a - b$ obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{u-v}{2}\right) \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \qquad (3)\end{aligned}$$

Vamos à solução do problema.



Como o triângulo ABC é isósceles, os ângulos da base medem $80°$. Portanto, $\angle MBN = 20°$ e $\angle MCN = 30°$. Usando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$ deduzimos que $\angle BNC = 40°$, $\angle BMC = 50°$ e $\angle BMN = 180° - (x + 20°)$ onde $x = \angle BNM$ é o que queremos descobrir. Vamos supor que $BC = 1$. Então como MBC é isósceles temos que $BM = 1$. Pela lei dos senos no triângulo BMN temos que

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen}(\angle BMN)}{BN} = \frac{\operatorname{sen}(x + 20°)}{BN}. \tag{4}$$

Pela lei dos senos no triângulo BNC temos que

$$\frac{BN}{\operatorname{sen} 80°} = \frac{1}{\operatorname{sen} 40°} \implies BN = \frac{\operatorname{sen} 80°}{\operatorname{sen} 40°}.$$

Usando que $80 = 40 + 40$ e a identidade (1), temos então que $BN = 2\cos 40°$ e portanto, por (4), temos que

$$2 \operatorname{sen} x \cos 40° = \operatorname{sen}(x + 20°) \tag{5}$$

Usando a identidade (2) no lado esquerdo (5), obtemos

$$\operatorname{sen}(x + 40°) + \operatorname{sen}(x - 40°) = \operatorname{sen}(x + 20°)$$

e então

$$\operatorname{sen}(x + 40°) = \operatorname{sen}(x + 20°) - \operatorname{sen}(x - 40°). \tag{6}$$

Usando a identidade (3) no lado direito de (6) obtemos

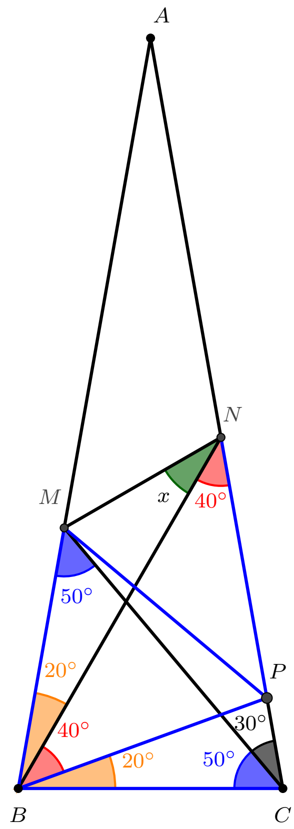
$$\operatorname{sen}(x + 40°) = 2 \operatorname{sen}(30°) \cos(x - 10°) = \cos(x - 10°)$$

Como $\cos(x - 10°) = \operatorname{sen}(90° - (x - 10°)) = \operatorname{sen}(100° - x)$ temos então que

$$\operatorname{sen}(x + 40°) = \operatorname{sen}(100° - x)$$

Isso acontece quando $x + 40° = 100° - x$ ou $x + 40° = 180° - (100° - x)$. O segundo caso é impossível e o primeiro caso nos fornece $x = 30°$.

Problema 9 - Solução 2 - Usando construção auxiliar



Como anteriormente, comece deduzindo os ângulos explicitados na figura da Solução 1. Seja ℓ o comprimento de BC.
Marque o ponto P sobre o AC tal que $\angle NBP = 40°$. Dessa forma $\angle CBP = 60° - 40° = 20°$.
Consequentemente, $\angle CPB = 180° - 80° - 20° = 80°$. Assim, CBP é isósceles (por ter dois ângulos de $80°$) e então $BP = BC = \ell$.
Como MBC é isósceles (por ter dois ângulos de $50°$) temos também que $BM = BC = \ell$.
Como $\angle MBP = 60°$ e $BM = BP = \ell$ concluímos que MBP é equilátero e portanto $MP = \ell$.
Como o triangulo BPN é isósceles (por ter dois ângulos de $40°$) temos que também $PN = BP = \ell$.
Como $\angle CPM = 80° + 60° = 140°$, concluímos que $\angle MPN = 180° - 140° = 40°$.
Como MPN é isósceles (por ter dois lados iguais a ℓ) com $\angle MPN = 40°$, os ângulos da base $\angle PMN$ e $\angle PNM$ medem $70°$.
Portanto $x = 70° - 40° = 30°$.