POLOS OLÍMPICOS DE
TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

Nível 2

Contagens elementares

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo

Problemas

Problema 1. (OBMEP 2018) Um número inteiro positivo é chamado de *interessante* quando termina com um algarismo que é igual ao produto de seus demais algarismos. Por exemplo, 326 e 1020 são interessantes, pois $3 \times 2 = 6$ e $1 \times 0 \times 2 = 0$.

a) Quantos números interessantes de quatro algarismos terminam com o algarismo 6?

b) Quantos números interessantes de cinco algarismos terminam com o algarismo 0?

Problema 2. O curso de Combinatória do professor Gugu é frequentado por 7 meninas e 4 meninos. De quantas maneiras estes estudantes podem se sentar em uma mesa circular de maneira que não existam dois meninos sentados um ao lado do outro?

Problema 3. Encontre a quantidade de números de dois dígitos ab que são divisíveis por ambos seus dígitos.

Problema 4. Determine o número de funções $f : \{1, 2, \ldots, 1999\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ satisfazendo a condição que $f(1) + f(2) + \cdots + f(1999)$ seja ímpar.

Problema 5. (AIME 1992) Para quantos pares de inteiros consecutivos no conjunto

$$\{1000, 1001, 1002, \ldots, 2000\}$$

a operação de "vai um" não acontece quando somamos os dois números?

Problema 6. Encontre o número de triplas ordenadas de conjuntos (A, B, C) tais que $A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots, 2013\}$ e $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Problema 7. (OBMEP 2019) Um tabuleiro preenchido com as letras A, B, C e D é *bacana* se essas quatro letras aparecem em qualquer quadriculado 2×2 do tabuleiro. Quantos tabuleiros *bacanas* 2×8 existem?

Problema 8. (OBM 2014) No super bola, o mais novo jogo de futebol, cada jogador joga em temporadas. Cada temporada possui sete partidas e em cada partida o jogador pode obter 3 pontos se vencer, 1 ponto se empatar e 0 pontos se perder. De quantos modos diferentes um jogador pode obter exatamente 15 pontos em uma temporada?

Problema 9. Quantas quintúplas oredenadas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de inteiros positivos que deixam resto 3 quando divididos por 4 são tais que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 35?$$

Problema 10. (OBM 2013) Determine o número de quádruplas ordenadas de inteiros positivos (x, y, z, w) que satisfazem

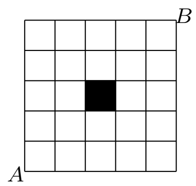
$$x \cdot y \cdot z \cdot w = 2013.$$

Problema 11. (OBM 2012) Existem 20 cidades marcadas em uma circunferência. Um comerciante deseja percorrer as 20 cidades através de um caminho que passe por cada cidade apenas uma vez, que sempre una duas cidades através de um segmento de reta e que esses segmentos de reta percorridos entre as cidades nunca se cruzem. De quantas formas esse comerciante pode estabelecer sua rota?

Problema 12. Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas maneiras esta primeira rodada pode ser realizada?

Problema 13. Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para resgatar um cálice sagrado. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher este grupo.

Problema 14. (OBM 2012) Uma formiga deve caminhar ao longo das linhas pretas do desenho abaixo do vértice A até o vértice B deslocando-se apenas um quadradinho para a direita ou para cima. Sabendo que a formiga não pode passar pelos vértices do quadrado preto, determine o número de caminhos diferentes que a formiga pode percorrer.



Problema 15. Quantos são os números de cinco dígitos que são múltiplos de 3 e possuem 6 como um de seus dígitos?

Problema 16. (OBM 2003) Num tabuleiro 2×2 como o mostrado a seguir, escreveremos números inteiros de 1 a 9 obedecendo à seguinte regra: $A > B$, $C > D$, $A > C$ e $B > D$.

A	B
C	D

a) Quantos tabuleiros diferentes existem tais que $B = C$?

b) Quantos tabuleiros diferentes existem no total?

Problema 17. (OBM 2010) Dizemos que um número inteiro positivo n é abestado se ao lermos da direita para esquerda obtivermos um inteiro maior que n. Por exemplo, 2009 é abestado porque 9002 é maior que 2009, por outro lado, 2010 não é abestado pois 0102, que é o número 102, é menor que 2010 e 3443 não é abestado pois quando lido da direita para esquerda é exatamente igual ao original. Quantos inteiros positivos de quatro algarismos são abestados?

Problema 18. Dados n objetos distintos, de quantas maneiras diferentes podemos escolher um número ímpar de objetos?

Problema 19. (Cone-Sul 2010) Pedro escolhe duas frações irredutíveis, ambas com numerador e denominador positivos tais que:

- A soma das frações é igual a 2.
- A soma dos numeradores das frações é igual a 1000.

De quantas maneiras Pedro pode fazer sua escolha?

Problema 20. (Holanda 2000) Três caixas contém 600 bolas cada uma. A primeira contém 600 bolas vermelhas idênticas, a segunda contém 600 bolas brancas idênticas, e a terceira caixa contém 600 bolas azuis idênticas. Ana escolhe 900 bolas dessas três caixas. De quantas maneiras as bolas podem ser escolhidas?

Por exemplo, pode-se escolher 250 bolas vermelhas, 187 bolas brancas e 463 bolas azuis, ou pode-se escolher 360 bolas vermelhas e 540 bolas azuis (nenhuma branca).

Problema 21. Dado um alfabeto com 3 letras a, b, c, encontre o número de palavras com $n \in \mathbb{N}$ letras que apresentam a letra a um número par de vezes.

Problema 22. Encontre o número de pares ordenados (A, B), onde A e B são subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, tais que A não está contido em B e nem B está contido em A.

Problema 23. (Bangladesh 2021) Dois sapos, Alfredo e Barnabé, estão sentados no plano cartesiano, nos pontos $(0, 0)$ e $(2, 0)$ respectivamente. Ambos só podem saltar uma unidade para cima ou para a direita. Alfredo faz uma sequência de saltos que termina no ponto $(5, 5)$, já Barnabé uma sequência que termina no ponto $(7, 5)$. De quantas maneiras diferentes eles podem fazer esta sequência de saltos de maneira que não exista nenhum ponto no plano cartesiano que tenha sido visitado por ambos sapos?

Problema 24. (Olimpíada de Maio 2018) Em cada casa de um tabuleiro 5×5 se escreve um dos números 2, 3, 4 ou 5 de maneira que a soma de todos os números em cada linha, coluna, ou diagonal seja par.

De quantas maneiras podemos preencher o tabuleiro?

OBS: Um tabuleiro 5×5 tem exatamente 18 diagonais de diferentes tamanhos. Em particular, sua quinas são diagonais de tamanho 1.

Problema 25. O diretor de um internato quer distribuir 61 ingressos para uma peça de teatro entre três alojamentos, de forma que nenhum alojamento receba mais ingressos que os outros dois combinados. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Problema 26. Desenhamos todas as diagonais de um poliedro convexo de n lados. Suponha que não existam 3 delas que passem por um mesmo ponto. Encontre o número de triângulos no mosaico por elas determinado.

Problema 27. Dado um polígono convexo de n lados, podemos dividi-lo em $n-2$ triângulos cujos lados são lados do próprio polígono ou diagonais deste. Chamamos este tipo de divisão de *triangularização* do polígono. Quantas *triangularizações* distintas podemos construir para um poliedro convexo de n lados?

Soluções

1. a) Seja $abc6$ um número interessante. Precisamos escolher a, b e c de maneira que $a \cdot b \cdot c = 6$. Note que pelo menos um destes números tem que ser 1, pois $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \geq 6$. Temos dois casos:

1) Se apenas um deles é igual a 1, os outros tem que ser iguais a 2 e 3. Como podemos permutar tais escolhas entre a, b e c, logo temos 6 possibilidades.

2) Se dois deles são iguais a 1, o outro tem que ser igual a 6. Neste caso, basta escolher quem é igual a 6. Temos 3 possibilidades.

Portanto, no total existem $6 + 3 = 9$ números interessantes deste tipo.

b) Seja $abcd0$ um número interessante. Neste caso, um dos dígitos b, c ou d tem que ser 0. Note que a não pode ser 0, pois é o primeiro dígito. É mais razoável contar o total de números que terminam com 0 e subtrair destes aqueles que também terminam com 0 e não são interessantes.

O total de números de cinco dígitos que terminam em 0 é $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$. Por outro lado, aqueles que não são interessantes dentre estes são exatamente aqueles tais que a, b, c e d são diferentes de 0. Logo são $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$ no total.

A quantidade de números interessantes deste tipo é portanto 2439.

2. Inicialmente iremos colocar as meninas sentadas na mesa. Existem 7! maneiras de colocá-las em uma fila. Como em um círculo nos importamos apenas com a ordem cíclica na qual elas estão sentadas, existem no total $7!/7 = 6!$ maneiras delas se sentarem na mesa. Entram agora os meninos. Considerando os 7 espaços entre as meninas já sentadas na mesa, cada menino tem que sentar em um deles e não pode haver 2 meninos que se sentam no mesmo espaço entre duas meninas. Sendo assim, existem $\binom{7}{4} \times 4!$ maneiras de escolhermos como os meninos podem se sentar. No total, são $\frac{6! \cdot 7!}{3!} = 604800$ maneiras nas quais o grupo pode se sentar.

3. Queremos encontras os pares (a, b) com $a, b \geq 1$ (0 só divide 0) tais que $a \mid 10a + b$ e $b \mid 10a + b$. Em particular, temos que $a \mid b$ e $b \mid 10a$. Dividimos o problema em casos.

1. Se b é ímpar e $b \neq 5$, temos que $b \mid a$, logo $a = b$ (pois $a \mid b$ também). Neste caso temos então 4 possibilidades.
2. Se $b = 5$, temos $a \mid 5$, logo $a = 1$ ou 5. Existem 2 possibilidades.
3. Se b é par, $b = 2b'$ para $b' \in \{1, 2, 3, 4\}$. Neste caso $b' \mid 5a$ e como $b' < 5$, temos que $b' \mid a$. Segue portanto que $b = a$ ou $b = 2a$. Temos portanto 8 possibilidades.

   Somando todos os casos, temos 14 possibilidades.

4. Escolhemos os valores de $f(i)$ para $i = 1, 2, \ldots, 1998$ de forma independente, ou seja, de 4^{1998} maneiras. Se o valor da soma $f(1) + f(2) + \cdots + f(1998)$ for par, existem duas escolhas para $f(1999)$: 1 ou 3. Se for ímpar, também existem duas escolhas: 2 ou 4. Sendo assim, sempre existem duas possibilidades para $f(1999)$ e a quantidade total de funções é $4^{1998} \times 2 = 2^{3997}$.

5. Representamos os números deste conjunto por $1abc$. Iremos contar para quantos números deste tipo, não ocorre "vai um" na soma com seu sucessor $1a'b'c'$ (ou 2000 no caso em que $1abc = 1999$).

Se $c < 9$, temos $a' = a$, $b' = b$ e $c' = c + 1$. Neste caso não ocorre "vai um" se e só se a, b e c estão entre 0 e 4. Temos $5 \times 5 \times 5 = 125$ possibilidades.

Se $c = 9$ e $b < 9$, temos $a' = a$, $b' = b + 1$ e $c' = 0$. Neste caso não ocorre "vai um" se e só se a e b estão entre 0 e 4. Temos $5 \times 5 = 25$ possibilidades.

Se $c = 9$, $b = 9$ e $a < 9$, temos $a' = a + 1$, $b' = 0$ e $c' = 0$. Não ocorre "vai um" se e só se a está entre 0 e 4. Mais 5 possibilidades.

Caso contrário $1abc = 1999$ e não há "vai um" na soma com 2000. O número total de possibilidades é $125 + 25 + 5 + 1 = 156$.

6. Para cada $i = 1, 2, \ldots, 2013$, sua situação de pertinências admite 6 possibilidades:

- $i \in A$, $i \notin B$ e $i \notin C$;
- $i \in A$, $i \in B$ e $i \notin C$;
- $i \in A$, $i \notin B$ e $i \in C$;
- $i \notin A$, $i \in B$ e $i \in C$;
- $i \notin A$, $i \in B$ e $i \notin C$;
- $i \notin A$, $i \notin B$ e $i \in C$.

As outras duas não podem ocorrer, pois se $i \notin A$, $i \notin B$ e $i \notin C$, então $A \cup B \cup C \neq \{1, 2, \ldots, 2013\}$; e se $i \in A$, $i \in B$ e $i \in C$, então $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Feita uma escolha de pertinências entre os itens acima para cada $i = 1, 2, \ldots, 2013$ podemos construir a tripla ordenada (A, B, C) a ela correspondente e vice-versa. Portanto a resposta é 6^{2013}.

7. Começamos preenchendo o quadrado 2×2 da esquerda. Existem $4!$ maneiras de fazer isto. Chamemos de Q_1 este quadrado e de Q_2 o próximo quadrado 2×2 do tabuleiro. A coluna direita de Q_1 coincide com a coluna esquerda de Q_2, sendo assim, duas entradas de Q_2 já estão determinadas. As outras duas, correspondentes à terceira coluna do tabuleiro 2×2 podem ser escolhidas de 2 maneiras distintas. Procedemos indutivamente, comparando Q_3 e Q_2, até Q_7 e Q_6, cada comparação nos dando duas possibilidades para as entradas de uma nova coluna. No total temos $4! \times 2^6 = 1536$ possibilidades.

8. O jogador pode ter no máximo 2 derrotas. Sejam v o número de vitórias e e o número de empates. Dividimos em casos

1. 0 derrotas: Neste caso $3v + e = 15$ e $v + e = 7$, donde $v = 4$ e $e = 3$. Temos portanto $\binom{7}{3} = 35$ possibilidades.
2. 1 derrota: Neste caso $3v + e = 15$ e $v + e = 6$, donde $v = 9/2$, o que é impossível.
3. 2 derrotas: Neste caso $3v + e = 15$ e $v + e = 5$, donde $v = 5$ e $e = 0$. Temos $\binom{7}{2} = 21$ possibilidades.

No total são 56 possibilidades.

9. Podemos escrever, para cada $i = 1, 2, 3, 4, 5$, $x_i = 4y_i - 1$ e notamos que x_i é positivo se e somente se y_i também o for. A equação equivale a

$$4y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 4y_4 + 4y_5 = 40 \iff y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10.$$

Considerando um fila de 10 pedras, podemos separá-las por 4 barras de $\binom{9}{4} = 126$ maneiras. Cada uma corresponde a uma das soluções da equação do enunciado.

10. Fatorando 2013, encontramos $3 \times 11 \times 61$. Podemos construir cada uma das soluções (x, y, z, w) da seguinte maneira. Escolhemos em qual das entradas (x, y, z ou w) aparece (uma única vez!) o fator 3. Após fazermos isso, fazemos o mesmo com 11 e 61. Cada uma das escolhas nos dá uma quádrupla ordenada distinta. Logo são no total $4^3 = 64$ soluções.

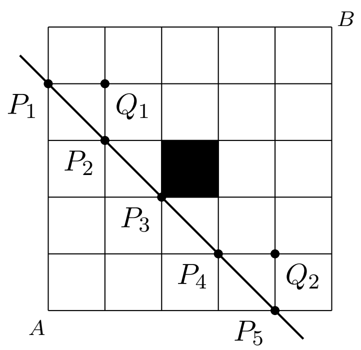
11. Inicialmente o comerciante escolhe uma dentre as 20 cidades. Dela, ele tem que visitar uma das duas vizinhas, pois, caso contrário, ele separaria o círculo em duas regiões, entre as quais só se poderia transitar atravessando o segmento de reta determinado por sua primeira viagem. Pelo mesmo motivo, no seu caminho futuro, em nenhum momento ele pode fazer uma viagem que separaria o conjunto de cidades ainda não visitadas em duas regiões distintas. Sendo assim, pode se mostrar por indução que o conjunto de cidades visitadas sempre forma um arco sem saltos no círculo e que em cada momento (exceto o último) ele sempre tem duas escolhas de viagem, cada uma das cidades imediatamente vizinhas (em relação à circunferência) a este arco. Portanto o número de soluções é $20 \cdot 2^{18}$.

12. Podemos colocar os 10 jogadores em uma fila de 10! maneiras. Podemos então organizar a primeira rodada fazendo o primeiro enfrentar o segundo, o terceiro enfrentar o quarto e assim por diante até o nono enfrentar o décimo. Note porém que cada pareamento é contado várias vezes. Precisamente, podemos separar cada fila em uma fila de 5 pares e a ordem destes pares não interfere no pareamento. Mais ainda, a ordem individual dentro de cada par também não faz diferença. Logo o total é $\frac{10!}{2^5 \cdot 5!} = 5 \times 9 \times 7 \times 3 = 945$.

13. Este número pode ser calculado através do segundo lema de Kaplansky, conforme enunciado nas vídeo-aulas. Mostremos brevemente como o argumento funciona para este caso específico. Enumere os cavaleiros de 1 a 12, de forma que os cavaleiros i e $i+1$ sejam vizinhos para $i = 0, 1, \ldots, 11$ e os cavaleiros 12 e 1 também. Considere os possíveis grupos tais que o cavaleiro 12 não está entre eles. Precisamos selecionar os 5 dentre cavaleiros de 1 a 11 de forma que um não seja o sucessor do outro. Considerando aqueles que não foram selecionados dentre os 11, ou melhor, os grupos contíguos por eles determinados, o problema equivale a contar quantas soluções existem da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 11 - 5 = 6$ com x_1 e x_6 não negativos e os demais sendo inteiros positivos. Ou seja, o número de soluções de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$ nas quais cada um dos x_i é um inteiro positivo. Este número é igual a $\binom{7}{5} = 21$.

Por outro lado, as escolhas para as quais o cavaleiro 12 é um dos cavaleiros correspondem a escolhas de 4 cavaleiros na fila de 2 até 10 sem que existam dois consecutivos. Repetindo o mesmo argumento acima encontramos mais $\binom{6}{4} = 15$ maneiras. O total é portanto igual a 36.

14. A figura abaixo ajuda na contagem:



Observe que todo caminho de A até B passa por exatamente um dos pontos P_1, P_2, ..., P_5

exatamente uma vez. Para não cruzar o quadrado marcado, não pode passar por P_3. Além disso, se passar por P_2 tem que imediatamente após ir para Q_1 e se passa por P_4 tem que imediatamente após ir para Q_2.

Podemos contar a quantidade de caminhos dividindo em casos.

- passando por P_1: Existe 1 caminho de A até P_1 e 6 caminhos de P_1 até B, cada um deles correspondendo ao possível instante em que a formiga caminha para cima. São 6 caminhos portanto.

- passando por P_2: Existem 4 caminhos de A até P_2, cada um deles correspondendo ao instante em que a formiga caminha para a direita. Após isto ela vai a Q_1. De Q_1 a B existem 5 caminhos, cada um deles correspondendo ao momento em que ela vai para cima. São $4 \times 5 = 20$ caminhos.

- passando por P_4: Simétrico ao caso P_2. Novamente, 20 caminhos.

- passando por P_5: Simétrico ao caso P_1. Mais 6 caminhos.

No total são 52 caminhos.

15. O maior número com cinco dígitos múltiplo de 3 é $99999 = 3 \times 33333$, já o menor é $10002 = 3 \times 3334$. Segue que a quantidade de números de 5 dígitos múltiplos de 3 é igual a 30000. Contemos agora quantos destes não apresentam dígito 6.

Podemos escolher o primeiro dígito de 8 maneiras (todas menos 0 ou 6). Já o segundo, terceiro e quarto dígitos de 9 maneiras. Escolhidos os 4 primeiros dígitos, se a soma deles deixar resto módulo 3 igual a

- 0: o último dígito pode ser 0, 3 ou 9 (observe que não podemos escolher o 6);

- 1: o último dígito pode ser 1, 4 ou 7;

- 2: o último dígito pode ser 2, 5 ou 8.

Em qualquer um dos casos, temos 3 possibilidades. Portanto a quantidade de múltiplos de 3 que não apresentam dígito 6 é $9 \times 8 \times 8 \times 8 \times 3 = 17496$.

Logo a resposta é $30000 - 17496 = 12504$.

16. a) Se $B = C = k$, existem $9 - k$ escolhas para A e $k - 1$ escolhas para D. Logo $(9-k)(k-1)$ escolhas. Somando de 1 a 9, obtemos: $2 \times (1 \times 7 + 2 \times 6 + 3 \times 5) + 4 \times 4 = 84$.

b) Suponha que os 4 números são distintos. Para cada escolha de 4 números distintos entre 1 e 9, há duas escolhas de valores A, B, C e D correspondentes: A e D são o maior e o menor valor respectivamente, enquanto B e C podem ser escolhidos dentre os dois valores do meio. Neste caso, temos $\binom{9}{4} \times 2 = 252$ escolhas.

O total de escolhas é portanto $84 + 252 = 336$.

17. Seja $abcd$ um inteiro abestado. Note que, pela condição de ser abestado, $d \geq a$, e por ter 4 dígitos, $a \geq 1$. Dividimos a contagem em casos

- $d = a$: Neste caso, devemos necessariamente ter $c > b$. Cada escolha de dois dígitos entre 0 e 9 corresponde a exatamente uma escolha possível para b e c. Logo temos $\binom{10}{2} = 45$ possibilidades para cada um dos 9 casos ($d = a = 1, 2, \ldots, 9$), totalizando 405 possibilidades.

- $d > a$: Existem $\binom{9}{2} = 36$ casos deste tipo. Para cada um deles, quaisquer escolhas de b e c funcionam. Logo são 3600 possibilidades.

Juntando os dois casos, obtemos 4005 números abestados.

18. Seja I o número de maneiras de se escolher um subconjunto de cardinalidade ímpar e P o número de maneiras de se escolher um subconjunto de cardinalidade par. Sabemos que $P + I = 2^n$. Mais ainda,

$$P = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \quad \text{e} \quad I = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}.$$

Segue do binômio de Newton que

$$P - I = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$

Logo $I = P = 2^{n-1}$.

19. Sejam $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ as duas frações irredutíveis. Temos $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = 2 \implies ps + qr = 2qs$. Como s é primo com r, obtemos que $s \mid q$, e, como q é primo com p, $q \mid s$. Logo $q = s$ e como $p + r = 1000$, obtemos $q = s = 500$.

As soluções então correspondem aos valores de p (e r) entre 1 e 1000 que são primos com 500. Ou seja, os valores que não sejam divisíveis por 2 ou 5. Pelo princípio da inclusão-exclusão, o número de múltiplos de 2 ou 5 é $\frac{1000}{2} + \frac{1000}{5} - \frac{1000}{10} = 500 + 200 - 100 = 600$. Portanto, a quantidade de p's primos com 2 e 5 é igual a 400. Como a ordem dos fatores não altera a soma, ou seja, a solução $(\frac{p}{500}, \frac{1000-p}{500})$ é equivalente à solução $(\frac{1000-p}{500}, \frac{p}{500})$, o número total de maneiras é $400/2 = 200$.

20. O problema equivale a encontrar todas as triplas de inteiros (x, y, z) tais que $x + y + z = 900$ e $0 \le x, y, z \le 600$. Conforme vimos nas video-aulas, o número de triplas de inteiros não-negativos tais que $x + y + z = 900$ é igual ao número de triplas de inteiros positivos tais que $x + y + z = 903$, e esta última quantidade é $\binom{902}{2}$. Lembramos que isto pode ser observado considerando-se 903 casas em uma linha e colocando os 2 sinais de adição em diferentes espaços entre estas casas.

Note que, se $x + y + z = 900$, no máximo um desses valores é maior que 600. Sendo assim, a quantidade de soluções para as quais um dos valores é maior que 600 corresponde a 3 vezes o número de triplas não negativas tais que $x + y + z = 299$, ou seja, $3 \cdot \binom{301}{2}$. Para chegar a este número, observe que quando $x > 600$, o número $x' = x - 601$ é um inteiro não-negativo e a tripla (x', y, z) satisfaz $x' + y + z = 299$. Repetindo-se o mesmo raciocínio para y e z chegamos na contagem anterior.

A resposta portanto é $\binom{902}{2} - 3 \cdot \binom{301}{2} = 270901$.

21. Seja P_n o número de palavras com um número par de letras a e I_n o número de palavras com um número ímpar de letras a. Temos

$$P_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{n-2k} \binom{n}{2k} \quad \text{e} \quad I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} 2^{n-2k-1} \binom{n}{2k+1}.$$

Segue do binômio de Newton que $P_n + I_n = (2+1)^n = 3^n$ e $P_n - I_n = (2-1)^n = 1$. Logo $P_n = \frac{3^n+1}{2}$.

22. Dividimos em casos pela cardinalidade de A. Se $|A| = k$, então $1 \le k \le 4$, caso contrário $A \subset B$ ou $B \subset A$. Existem $2^k - 1$ possibilidades para $A \cap B$ (todos subconjuntos de A exceto o próprio A)

e $2^{5-k}-1$ possibilidades para $B \setminus A$ (todos subconjuntos de A^c exceto o conjunto vazio). Para cada $|A| = k$ existem assim $2^5 - 2^k - 2^{5-k} + 1$ conjuntos B tais que o par (A, B) tem as propriedades desejadas. Mas para cada k existem $\binom{5}{k}$ subconjuntos A possíveis.

Dessa forma, a quantidade de pares é

$$\sum_{k=1}^{4}\left(2^5 - 2^k - 2^{5-k} + 1\right)\binom{5}{k} = 2 \cdot (15 \cdot 5 + 21 \cdot 10) = 570.$$

23. Este problema usa um raciocínio similar ao princípio da reflexão.

O número total de pares de caminhos que podem se cruzar ou não é $\binom{10}{5}^2$, pois basta escolher os momentos em que cada um dos sapos salta para a direita. Vamos contar o número de caminhos para os quais Barnabé pula em um ponto percorrido pelo caminho de Alfredo.

Associaremos pares de caminhos que se tocam a pares de caminhos que Barnabé percorre de $(2, 5)$ até $(5, 5)$ e Alfredo percorre de $(0, 0)$ até $(7, 5)$. Para tanto, dado um par de caminhos que se toca, consideremos o primeiro ponto na interseção de ambos; até ele os novos caminhos são iguais aos originais. A partir daí, no nosso novo par de caminhos, Barnabé faz os saltos do caminho de Alfredo e Alfredo os saltos do caminho de Barnabé.

Observe que pares de caminhos distintos se tornam pares de caminhos distintos. Por outro lado, todo par de caminhos tais que Alfredo vai de $(0, 0)$ até $(7, 5)$ e Barnabé vai de $(2, 5)$ até $(5, 5)$ tem que se cruzar em um ponto, e, portanto, fazendo a mesma operação de troca de caminhos a partir do primeiro ponto de interseção obtemos um par de caminho que se toca tal que Alfredo vai de $(0, 0)$ até $(5, 5)$ e Barnabé vai de $(2, 5)$ até $(7, 5)$. Sendo assim, esta associação é uma bijeção e o número de caminhos que se tocam é $\binom{12}{5} \cdot \binom{8}{3}$.

A resposta é $\binom{10}{5}^2 - \binom{12}{5} \cdot \binom{8}{3} = 19152$.

24. Consideramos as maneiras de preencher o tabuleiro com números 0 ou 1. Devido à paridade, dado um preenchimento deste tipo, em cada uma de suas casas podemos escolher um dentre dois valores do conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$ de forma que o preenchimento do tabuleiro seja bom. Sendo assim o resultado final será 2^{25} vezes a quantidade destas maneiras que queremos calcular.

Notemos inicialmente que os cantos tem que ser preenchidos com o 0. Por outro lado, dado qualquer canto, ambos seus vizinhos (os que tem lado em comum com o canto) tem que ter a mesma paridade. Determinados estes vizinhos, não é difícil deduzir quais tem que ser os valores das outras casas do tabuleiro para que ele tenha a propriedade desejada. Primeiramente notamos que 4 valores nas colunas e linhas na borda já estariam determinados, sendo assim só existiria uma escolha possível para o valor que ainda estava em aberto. A partir desses valores, podemos determinar qual tem que ser o valor central em todas as diagonais de tamanho 3, restando apenas as 5 casas centrais em aberto. Entretanto cada uma delas pode ser determinada pois a linha ou a coluna ou a diagonal em que está já tem 4 casas marcadas.

Por outro lado, não é difícil conferir que cada uma dessas escolhas gera um tabuleiro válido, ou seja, que não há conflito. As figuras abaixo exemplificam os casos mais difíceis (outras podem ser obtidas por simetria):

0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	1	0	1	0

0	0	1	1	0
0	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0

0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

0	0	1	1	0
0	0	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	1
0	1	0	1	0

Consequentemente, o número de maneiras de preencher com 0 ou 1 é 2^4, pois basta escolher a paridade dos vizinhos de cada canto. O número total de maneiras de preencher é portanto, 2^{29}.

25. Sejam $d_1+d_2+d_3 = 61$ a quantidade de ingressos dada a cada um dos dormitórios. Queremos que $d_1+d_2 \geq d_3$, $d_2+d_3 \geq d_1$ e $d_3+d_1 \geq d_2$. Note que, dado que $d_1+d_2+d_3 = 61$, a primeira desigualdade é equivalente a $d_3 \leq 61/2$, a segunda a $d_1 \leq 61/2$ e a terceira a $d_3 \leq 61/2$. Um problema equivalente é o de número **20.**. Seguindo o mesmo raciocínio de lá, temos um total de $\binom{63}{2} - 3 \cdot \binom{31}{2} = 558$.

26. Os triângulos deste mosaico se dividem em 4 tipos, dependendo da quantidade de vértices que eles têm em comum com os vértices do poliedro: 0, 1, 2 ou 3. Chamemos a quantidade de cada um desses tipos de triângulos de T_0, T_1, T_2 e T_3 respectivamente. Iremos calcular quantos triângulos são de cada um destes tipos.

- T_0: Dado um triângulo deste tipo, as diagonais que correspondem aos seus lados determinam 6 vértices distintos do polígono. Em contrapartida, cada subconjunto de seis vértices determina exatamente um triângulo deste tipo. De fato se A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 são estes vértices em ordem cíclica, as diagonais a eles associados só determinam um triângulo deste tipo, no caso aquele que tem lados nas retas A_1A_4, A_2A_5 e A_3A_6. Logo a quantidade de triângulos deste tipo é $\binom{n}{6}$.
- T_1: Triângulos deste tipo determinam 5 vértices distintos do polígono. Contudo, dado qualquer subconjunto de cinco vértices, existem exatamente 5 triângulos deste tipo associados ao conjunto, cada um dos vértices determinando um dos triângulos. Temos neste caso $5 \cdot \binom{n}{5}$ triângulos.
- T_2: Um triângulo deste tipo determina 4 vértices do polígono. Por outro lado, dados 4 vértices do polígono, podemos formar quatro triângulos com 2 vértices no polígono. Isto acontece porque um dos lados do triângulo tem que coincidir com um dos lados do quadrilátero determinado pelos 4 pontos; caso este lado fosse uma das duas diagonais do quadrilátero, as outras diagonais passando pelos vértices destes lados só se intersectariam em outros vértices do polígono. São mais $4 \cdot \binom{n}{4}$ triângulos.
- T_3: Neste caso temos 3 vértices em comum com o polígono. É claro que cada escolha de 3 vértices do polígono determina apenas um triângulo. Temos finalmente $\binom{n}{3}$ triângulos.

Segue que o número total de triângulos é $\binom{n}{6} + 5 \cdot \binom{n}{5} + 4 \cdot \binom{n}{4} + \binom{n}{3}$.

27. A solução deste problema será um pouco mágica. Na vídeo-aula "O Princípio da Reflexão" vimos que o número de caminhos no plano cartesiano que começam no ponto $(0,0)$ e terminam em $(2n,0)$, andando a cada passo $(1,1)$ ou $(1,-1)$, e que nunca atingem pontos abaixo do eixo x é igual a $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$. Chamamos inclusive este número de *número de Catalan*. Chamemos estes caminhos de *caminhos de Catalan*.

Iremos começar observando que os números de Catalan satisfazem uma recorrência. Note que o primeiro passo deste caminho tem que ser sempre $(1,1)$. Como o caminho tem que voltar para $(2n,0)$, em algum momento ele tem que sair de um ponto $(x,1)$ e ir logo depois para um ponto $(x+1,0)$, fazendo um passo do tipo $(1,-1)$. Marquemos o menos valor de x tal que isto ocorre, admitindo inclusive o caso $x=1$, ou seja, quando logo após o primeiro passo $(1,1)$ o caminho regressa ao eixo x por um passo $(1,-1)$.

Observe que $x+1$ tem que ser par, pois precisamos ter percorrido o mesmo número de passos $(1,1)$ e $(1-1)$ até chegarmos a este ponto. Seja $x+1 = 2m$, com $m \geq 1$. Considerando o caminho após $(2m,0)$, caso o transladarmos por $(-2m,0)$ obtemos um caminho de Catalan de $(0,0)$ até $(2(n-m),0)$.

Por outro lado, considerando a parte do caminho que vai de $(1,1)$ até $(2m-1,1)$, notamos que ela nunca toca o eixo x, porque $(2m,0)=(x+1,0)$ é o *primeiro momento* em que o caminho em questão retorna ao eixo x. Transladando este caminho por $(-1,-1)$, obtemos um caminho de Catalan de $(0,0)$ até $(2m-2,0)$.

Em contrapartida, dados caminhos de Catalan de tamanhos $m-1$ e $n-m$, podemos reverter esta construção de maneira a determinar um único caminho de Catalan de tamanho n.

Desta observação, concluímos que o número de caminhos de Catalan de $(0,0)$ até $(2n,0)$ que retornam pela primeira vez ao eixo x no ponto $(2m,0)$, para qualquer valor de $m=1,2,\ldots,n$ é igual a $C_{m-1}\cdot C_{n-m}$. Aqui convencionamos que $C_0=1$. Somando sobre todos os valores de m, obtemos a seguinte recorrência:

$$C_n=\sum_{k=0}^{n-1} C_k\cdot C_{n-1-k}.$$

Denote o número de triangularizações de um polígono convexo de $n\geq 3$ lados por T_{n-2}. Considere que $T_0=T_1=1$ (podemos definir os valores nestes casos). Note que $T_2=2$. Mostraremos que T_n satisfaz a mesma recorrência que os números de Catalan. Como os primeiros números destas sequências são iguais, segue por indução que o número de triangularizações de um polígono de n lados é igual a C_{n-2}.

Para tanto, sejam $A_1,A_2,\ldots,A_{n+2}$ os vértices de um polígono convexo de $n+2$ lados. O lado A_1A_{n+2} tem que estar em algum triângulos da decomposição. Suponha que este triângulo seja $A_1A_kA_{n+2}$, para algum valor de $k=2,\ldots,n+1$. Note que este triângulo divide o resto do polígono em duas partes: o polígono convexo de vértices $A_1,A_2,\ldots A_k$; e o polígono convexo de vértices $A_k,A_{k+1},\ldots A_{n+2}$.

Admitimos aqui casos degenerados, em que uma das partes seja apenas um segmento de reta, ou seja, neste caso não temos bem um polígono convexo. De qualquer forma, nossa escolha de valores de T_0 e T_1 foi feita tendo isto em mente.

A primeira parte pode ser triangularizada de T_{k-2} maneiras e a segunda de T_{n+1-k} maneiras. Ou seja, existem $T_{k-2}\cdot T_{n+1-k}$ triangularizações nas quais $A_1A_kA_n$ é um dos triângulos. Somando para $k=2,\ldots n+1$, obtemos

$$T_n=\sum_{k=2}^{n+1} T_{k-2}\cdot T_{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n-1} T_k\cdot T_{n-1-k},$$

que é a mesma recorrência para os C_n. Concluímos que o número de triangularizações de um polígono convexo de n lados é $\dfrac{1}{n-1}\dbinom{2n-4}{n-2}$.

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo