Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Curso de Aritmética - Nível 1

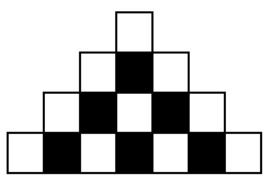
Prof. Emiliano Chagas

Sequências - Aula 06

Muitos problemas, de álgebra ou teoria dos números, envolvem sequências. Elas podem ser definidas como uma lista ordenada de elementos. Por exemplo, na sequência $(2, -3, 5, 8)$ o primeiro termo é 2, o segundo é -3, o terceiro é 5 e o quarto termo é 8. Sequências podem ter uma quantidade limitada ou ilimitada de elementos. Em geral as sequências possuem um padrão e geralmente os problemas pedem para encontrarmos, efetuando alguns passos, alguns termos partindo desses padrões.

Bons estudos!

Problema 1. (EUA 1^a Fase) A figura a seguir mostra parte de uma escada feita de quadrados pretos e brancos alternados, onde podemos ver a primeira e a quarta linha. Todas as linhas começam e terminam com um quadrado branco. Qual é o número de quadrados pretos da 37^a linha?



Solução. Em problemas de sequência devemos sempre procurar padrões. Veja que na primeira linha não há quadrados pretos, na segunda linha temos 1 quadrado preto, na terceira linha 2, na quarta 3 e assim por diante. Portanto se escolhermos um número para uma linha, a quantidade de quadrados pretos nessa linha é igual ao número dessa mesma linha menos 1. Portanto na 37^a linha existem 36 quadrados pretos.

Problema 2. (OBM 1^a Fase) Considere a sequência oscilante:

$1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, \cdots$. Qual é o 2003^o termo desta sequência?

Solução. A sequência se repete de 8 em 8. Então o oitavo termo é 2, o décimo sexto é 2, e assim por diante, até o termo 2000 (que é divisível por 8), que também é 2. Logo o termo 2001 é 1, 2002 é 2 e 2003 é 3. Podemos fazer esse problema direto dividindo 2003 por 8, obtendo quociente 250 e resto 3. Isso significa que essa sequência tem 250 blocos que começam em 8 e terminam em 8 e sobram 3 posições para percorrer ainda, essa posição é o número 3.

Problema 3. (OBM 2^a Fase) Observe as igualdades a seguir:

$$1 + 2 + 1 = 4$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$$
$$1 + 2 + 3 + +4 + 3 + 2 + 1 = 16$$
$$\vdots$$
$$1 + 2 + 3 \cdots + 2006 + 2007 + 2006 + \cdots + 2 + 1 = A$$

Qual é o valor de $\dfrac{A}{223^2}$?

Solução. Mais uma vez devemos procurar padrões. Veja que os números na direita da igualdade são quadrados perfeitos: $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $\cdots$ e esses números são aqueles de maior valor na soma, os termos do meio, portanto devemos ter que $A = 2007^2$. Portanto $\dfrac{A}{223^2} = \dfrac{2007^2}{223^2} = 81$.

1 Problemas

Sequências: Problemas Introdutórios

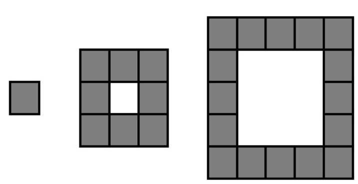
Problema 4. Observe as multiplicações a seguir:

$$101 \times 11 = 1111$$
$$101 \times 111 = 11211$$
$$101 \times 1111 = 112211$$
$$101 \times 11111 = 1122211$$
$$\vdots$$

Encontre a soma dos algarismos do número obtido quando multiplicamos 101 pelo número $1111 \ldots 11$, composto por 2007 algarismos 1.

Problema 5. Calcule soma de todos os números positivos ímpares até 2007 menos a soma de todos os números positivos pares até 2007.

Problema 6. Usando pastilhas de cerâmica preta na forma de quadradinhos foi composta uma decoração numa parede, mostrada parcialmente abaixo: Quantas pastilhas foram em-



pregadas em toda a decoração considerando-se que na última peça montada foram utilizadas 40 pastilhas?

Problema 7. Na sequência de números $1, a, 2, b, c, d, \cdots$ dizemos que o primeiro termo é 1, o segundo termo é a, o terceiro termo é 2, o quarto termo é b, e assim por diante. Sabe-se que esta sequência tem 2005 termos e que cada termo, a partir do terceiro, é a média aritmética de todos os termos anteriores. Qual é o último termo dessa sequência?

Problema 8. Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira, escrevendo no quadro-negro um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

(1) Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2. (2) Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Depois que os alunos escrevem um novo número a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras. Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

203 (dobra) $\rightarrow$ 406 (apaga) $\rightarrow$ 40 (apaga) $\rightarrow$ 4 ...
4197 (apaga) $\rightarrow$ 419 (dobra) $\rightarrow$ 838 (apaga) $\rightarrow$ 83 ...

a) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

b) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

c) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

Sequências: Problemas Propostos

Problema 9. Numa sequência, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores mais próximos. O segundo termo é igual a 1 e o quinto termo vale 2005. Qual é o sexto termo?

Problema 10. Esmeralda foi escrevendo os quadrados dos números inteiros positivos um em seguida ao outro formando o número $149162536\cdots$ e parou quando chegou no centésimo algarismo. Qual foi o último algarismo que ela escreveu?

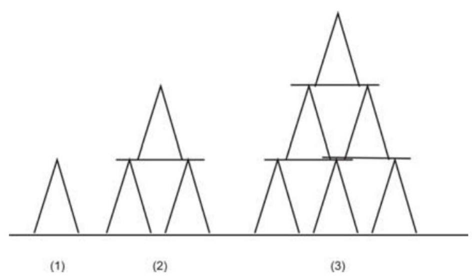
Problema 11. A sequência de Fibonacci é definida da seguinte forma: o termo 0, representado por F_0, é igual a 0, o termo 1, representado por F_1 é igual a 1, e a partir do termo 2, cada termo é a soma dos dois anteriores. Por exemplo: o termo 2, representado por F_2, é igual a $F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1$; o termo 3, representado por F_3, é igual a $F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$, e assim por diante.

Assim, os primeiros termos dessa sequência são: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, ...

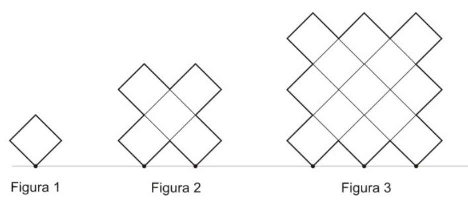
a) Calcule F_8, F_9, F_{10} e F_{11}.

b) F_{2002} é par ou ímpar? Justifique.

Problema 12. A figura a seguir mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. Para montar esses castelos foram usadas 2, 7 e 15 cartas, respectivamente. Quantas cartas serão necessárias para montar um castelo de 5 andares?



Problema 13. Rubinho constrói uma sequência de 10 figuras, cada uma delas formadas por quadradinhos de 1 cm de lado, conforme indicado ao seguir. A figura 2, por exemplo, tem área igual a 5 cm^2 e perímetro igual a 12 cm.



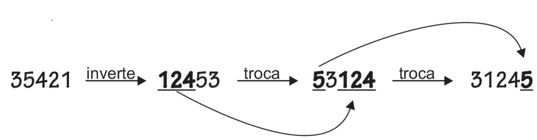
a) Qual é área da figura 5?

b) Qual é o perímetro da figura 10?

Problema 14. O troca-inverte é uma brincadeira com números em que há dois tipos de movimentos:

- troca: separar o número em dois grupos e trocar a ordem desses grupos;
- inverte: escrever o número na ordem inversa.

Por exemplo, começando com 35421 podemos obter 31245, como mostrado abaixo.

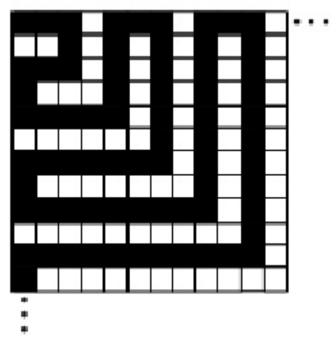


a) Brincando com o troca-inverte e começando com 123456, como podemos obter 165432?

b) Brincando com o troca-inverte e começando com 123, como podemos obter todos os outros cinco números de três algarismos diferentes que podem ser escritos com 1, 2 e 3?

c) Por que, no troca-inverte, começando com 123456 é impossével obter 243156?

Problema 15. Parte das casas de um quadriculado com o mesmo número de linhas (fileiras horizontais) e colunas (fileiras verticais) é pintada de preto, obedecendo ao padrão apresentado pelo desenho a seguir.



a) Quantas casas serão pintadas num quadriculado com 14 linhas e 14 colunas, de acordo com esse padrão?

b) Quantas linhas tem um quadriculado com 199 casas pintadas?

Problema 16. Considere os números 2, 3 e 6. Quando somamos todos os produtos de dois desses três números, obtemos um quadrado perfeito: $2.3 + 2.6 + 3.6 = 36 = 6^2$. Podemos acrescentar mais um número na sequência dada de modo que a soma de todos os produtos de dois dos agora quatro números continue sendo um quadrado perfeito: basta somar o dobro da raiz quadrada do quadrado perfeito que acabamos de obter na soma de todos os números anteriores. No nosso exemplo, o quarto termo é $2 + 3 + 6 + 2\sqrt{6^2} = 23$ e, de fato, $2.3 + 2.6 + 3.6 + 2.23 + 3.23 + 6.23 = 289 = 17^2$. Com isso, obtemos a sequência $2, 3, 6, 23$.

Sequências que, como essas, têm como soma dos produtos de seus elementos tomados dois a dois um quadrado perfeito, são chamadas esnúrficas. Uitilize calculadora nesse problema.

a) Calcule o próximo número (quinto termo) da sequência esnúrfica descrita acima. Lembre-se de que ele é a soma dos anteriores mais o dobro da raiz quadrada da soma dos produtos de seus elementos tomados dois a dois.

b) Podemos também começar uma sequência esnúrfica com apenas dois números cujo produto seja um quadrado perfeito. Por exemplo, 2 e 8 cujo produto é $16 = 4^2$. Calcule o próximo número (terceiro termo) dessa sequência.

c) Calcule o quociente entre o quinto e o quarto termo da sequência esnúrfica iniciada com 2 e 8.

Problema 17. Um baralho contendo cartas numeradas $1, 2, 3, \ldots, 2n$ é embaralhado da seguinte forma:

- divide-se o monte de cartas na metade, formando-se dois montes: o primeiro com as n primeiras cartas e o segundo, com as n seguintes;
- intercalam-se as cartas dos dois montes, sempre começando do segundo monte.

Por exemplo, para $n = 3$ e as cartas estão inicialmente na ordem crescente e, embaralhando repetidas vezes, obtemos $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, 5, 6 \to 4, \mathbf{1}, 5, \mathbf{2}, 6, \mathbf{3} \to 2, 4, 6, 1, 3, 5 \to 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Desembaralhatus!, como diria Parry Hotter. Após três embaralhadas o monte de cartas volta para a ordem original!

A embaralhada pode ser representada através de diagramas: Ou seja: Após cada uma

das três embaralhadas, a 1^a carta é levada para a 2^a posição, a 2^a carta é levada para a 4^a posição, a 4^a carta é levada para a 1^a posição. E a 3^a carta é levada para a 6^a posição, a 6^a carta é levada para a 5^a posição e a 5^a carta é levada para a 3^a posição.

a) Desenhe os diagramas correspondentes para um baralho com 32 cartas ($n = 16$).

b) Qual é o número mínimo de embaralhadas que devem ser feitas para que um baralho com 32 cartas volte para a ordem original?

Problema 18. Considere as seguintes sequências: $S1$: $12345678, 81234567, 78123456, \ldots$, na qual o último algarismo do termo anterior (algarismo das unidades) torna-se o primeiro algarismo na esquerda do próximo termo.

$S2$: $1234567898765, 5612345678987, 7856123456789, \ldots$, na qual o algarismo das unidades torna-se o primeiro algarismo na esquerda do próximo termo, e o das dezenas torna-se o segundo algarismo na esquerda.

a) Apresente o quinto termo da sequência $S1$ e o quarto termo da sequência $S2$.

b) A sequência $S1$ tem 2006 termos. Qual é o seu último termo?

c) A sequência $S2$ termina quando o primeiro termo se repete. Quantos termos tem essa sequência?

Problema 19. Esmeralda escolhe um número inteiro positivo qualquer e realiza a seguinte operação com ele: cada um de seus algarismos é trocado pelo seu sucessor, com exceção do 9, que é trocado por 0. Em seguida, os eventuais zeros que aparecem na esquerda são eliminados. Por exemplo, ao se realizar a operação no número 990003953 obtém-se 1114064 (note que os dois zeros na esquerda gerados pelos dois primeiros algarismos 9 foram eliminados). A operação é repetida até que se obtenha 0. Por exemplo, começando com 889, obtemos a sequência de números:

$$889, 990, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$$

a) Apresente a sequência de números quando o primeiro número é 2008.

b) Mostre que, independente do número inicial, após uma quantidade finita de operações Esmeralda obtém 0.

Sequências: Soluções dos Introdutórios

4) (OBM 1^a Fase) No resultado da multiplicação de 101 por $1111\ldots11$, composto por 2007 algarismos 1, o dígito 1 aparece 4 vezes e o dígito 2 aparece $2007-2 = 2005$ vezes. Portanto a soma dos algarismos desse número é $1 \times 4 + 2 \times 2005 = 4014$.

5) (OBM 1^a Fase) A soma de todos os números positivos ímpares até 2007 menos a soma dos números positivos pares até 2007 pode ser escrita como $(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+(2005-2006)+2007 = -1003+2007 = 1004$.

6) (OBM 1^a Fase) Seja n o número de quadradinhos para formar um lado de uma peça. Então, são necessários $4\times(n-2)+4 = 4n-8+4 = 4n-4$ quadradinhos para formar a peça inteira. Na última peça da decoração temos $4n-4 = 40 \Leftrightarrow n = 11$. Note que para contar o número de quadradinhos utilizados basta observar que cada peça da esquerda se encaixa na da direita. Se encaixarmos todas, teremos um quadrado completo de lado igual a 11 quadradinhos. Portanto, o número de pastilhas utilizadas foi $11^2 = 121$.

7) (OBM 2^a Fase) Como 2 é a média aritmética de 1 e a, podemos escrever $\dfrac{1+a}{2} = 2, logo 1 + a = 4 \Leftrightarrow a = 3$; portanto, $b = \dfrac{1+2+3}{3} = 2$; $c = \dfrac{1+2+3+2}{4} = 2$; $d = \dfrac{1+2+3+2+2}{5} = 2$. Esses exemplos sugerem que todos os termos, a partir do terceiro, são iguais a 2. De fato, quando introduzimos em uma sequência um termo igual a média de todos os termos da sequência, a média da nova sequência é a mesma que a da sequência anterior. Assim, o último termo da sequência dada é 2.

8) (OBMEP 2^a Fase)

   a) Há várias soluções, como por exemplo 45 (apaga) $\to$ 4 (dobra) $\to$ 8 (dobra) $\to$ 16 (apaga) $\to$ 1. Ou 45 (dobra) $\to$ 90 (apaga) $\to$ 9 (dobra) $\to$ 18 (apaga $\to$ 1.

   b) Aqui também há várias soluções, como por exemplo 345 (apaga) $\to$ 34 (apaga) $\to$ 3 (dobra) $\to$ 6 (dobra) $\to$ 12 (apaga) $\to$ 1.

   c) Aplicamos a regra "apaga" até sobrar apenas um algarismo, e temos então três casos:

   1) Este algarismo é igual a 1 e a brincadeira acaba.

   2) Este algarismo é 2, 3 ou 4 : neste caso aplicamos a regra "dobra" algumas vezes até obter um número de dois algarismos cujo algarismo das dezenas seja 1 (16, 12 ou 16, respectivamente), e aplica-se a regra "apaga" obtendo o número 1.

   3) Este algarismos é 5, 6, 7, 8 ou 9: neste caso aplica-se a regra "dobra" uma vez, obtendo respectivamente 10,12, 14, 16 ou 18; então aplica-se a regra "apaga" para obter o número 1.

Sequências: Soluções dos Propostos

9) (OBM 1^a Fase) Seja x o primeiro termo. Como o segundo termo é 1, o terceiro termo é $x+1$, o quarto é $1+(1+x)=x+2$. Como o quinto termo é 2005, $(x+1)+(x+2)=2x+3=2005 \Leftrightarrow 2x=2002 \Leftrightarrow x=1001$. Logo o sexto termo é $(x+2)+(2x+3)=3x+5=3.1001+5=3008$.

10) (OBM 2^a Fase) Os números 1^2, 2^1, 3^2 possuem um algarismo. Os números 4^2, 5^2, $\cdots$, 9^2 possuem dois algarismos. Os números 10^2, 11^2, $\cdots$, 31^2 possuem três algarismos. Assim, ao escrever o quadrado do número 31, o número de algarismos escritos é $1\times 3+2\times 6+3\times 22=81$, faltando escrever 19 algarismos. Com os quadrados de 32, 33, 34 e 35, temos mais $4\times 4=16$ algarismos, faltando ainda escrever apenas três algarismos. Como o quadrado de 36 é 1296, concluímos que o último algarismo escrito foi o 9, o centésimo algarismo escrito por Esmeralda.

11) (OPM Fase Inicial)

    a) $F_8=F_6+F_7=8+13=21$, $F_9=F_7+F_8=13+21=34$, $F_9=F_7+F_8=21+34=55$ e $F_9=F_7+F_8=34+55=89$.

    b) Analisando a sequência de Fibonacci $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots$ percebemos um padrão. $F_0=0$ é par, $F_1=1$ é ímpar, logo $F_2=F_0+F_1$ é ímpar, por ser a soma de um número par com outro ímpar. F_3 será a soma de dois números ímpares, logo será par, F_4 será a soma de um número par com um ímpar, logo é ímpar. Com relação a paridade a sequência fica: par, ímpar, ímpar, par, ímpar, ímpar, par, ímpar, ímpar, $\ldots$, iniciando em F.

    Perceba: F_0, F_3 e F_6 são pares, na verdade sempre que tivermos um F_k com k múltiplo de 3, ele será par, caso contrário, será ímpar. Como 2002 não é um múltiplo de 3 então F_{2002} será ímpar.

12) (OBM 2^a Fase) Para fazer um novo andar num castelo já construído, precisamos de três cartas para cada andar anterior mais duas para o topo. Assim, a partir do castelo de 3 andares, para fazer o de 4 andares, precisamos de mais $3\times 3+2$ cartas, num total de $15+11=26$ cartas. Portanto, para fazer o castelo de 5 andares, precisamos de $26+4\times 3+2=40$ cartas.

    Outra solução: Para acrescentarmos um quarto andar a um castelo de 3 andares, precisamos de 3 cartas para separar a base dos demais andares e 4 pares de cartas para a base, totalizando $3+2.4=11$ cartas a mais. Analogamente, para acrescentarmos um quinto andar a um castelo de 4 andares, precisamos de 4 cartas para separar a base dos demais andares e 5 pares de cartas para a base, totalizando $4+2.5=14$ cartas a mais. Assim, para montar um castelo de 5 andares, precisamos de $15+11+14=40$ cartas.

    Observação: De fato, o acréscimo de um n-ésimo andar necessita de $n-1$ cartas para apoiar a base anterior, e n pares de cartas para a nova base. Portanto, são acrescentadas $n-1+2n=3n-1$ cartas por andar.

13) (OBM 2^a Fase)

a) Vemos que para passar da figura k para figura $k+1$ acrescentamos $k+1$ quadradinhos em cada lado da figura, sendo que os dos vértices estamos contando duas vezes. Assim, estamos acrescentando $4k$ quadradinhos. Logo, na figura 5 teremos $1+4+8+12+16=41$ quadradinhos de lado unitário, totalizando uma área de $41cm^2$.

b) Na figura 10, teremos em cada lado 10 quadradinhos com algum lado para fora da figura. Desses 10, 8 não estão nos cantos da figura e logo possuem apenas 2 lados participando do perímetro. Os 4 que estão no vértice possuem 3 lados que participam do perímetro. Logo, o perímetro da figura 10 é $2 \times 4 \times 8 + 4 \times 3 = 76$ cm.

14) (OBMEP 2^a Fase)

a) Uma solução: 123456 (inverte) $\rightarrow$ **65432**1 (troca) $\rightarrow$ 1**65432**.

b) Existem 5 números diferentes formados com os algarismos 1, 2 e 3, além de 123. Eles são 132, 213, 231, 312 e 321. Vamos mostrar como obter todos a partir de 123:
123 (troca) $\rightarrow$ 23**1** (inverte) $\rightarrow$ 132
123 (inverte) $\rightarrow$ **3**21 (troca) $\rightarrow$ 213
123 (troca) $\rightarrow$ 23**1**
123 (troca) $\rightarrow$ 3**12**
123 (inverte) $\rightarrow$ 321

c) Em um número qualquer formado com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, temos os algarismos das "pontas" e os do "meio"; por exemplo, em 621354 os algarismos das pontas são 6 e 4 e os algarismos 2, 1, 3, e 5 estão no meio. Dizemos também que dois algarismos são vizinhos se um está ao lado do outro; no exemplo em questão, $(2,1)$ e $(3,5)$ são dois pares de vizinhos. O movimento inverte troca os algarismos das pontas e mantém os vizinhos juntos. O movimento troca faz com que as pontas se tornem vizinhos e separa um par de vizinhos, fazendo com que eles se tornem pontas. Logo, começando com 123456, vemos que qualquer sequência de movimento troca e inverte tem como resultado um número em que 1 e 6 são ou pontas ou vizinhos; como isso não acontece com 243156, é impossível transformar 123456 em 243156 com esses movimentos. Alternativamente, podemos pensar nos algarismos do número 123456 escritos ao longo de um círculo orientado no sentido horário. O movimento inverte muda o sentido de rotação deste ciclo e o movimento troca mantém este sentido; por outro lado, algarismos vizinhos, em particular o 1 e o 6, permanecem sempre vizinhos após qualquer destes movimentos. Como em 243156 o 1 e o 6 não são vizinhos, concluímos que é impossível transformar 123456 em 243156 com esses movimentos.

15) (OBM 3^a Fase) Considerando a figura, conseguimos ver um padrão (de cima para abaixo e da esquerda para a direita). Número de quadrados pintados: $2 \times 2 \rightarrow 2$, $3 \times 3 \rightarrow 7$, $4 \times 4 \rightarrow 8$, $5 \times 5 \rightarrow 17$, $6 \times 6 \rightarrow 18$, $7 \times 7 \rightarrow 31$, $8 \times 8 \rightarrow 32$. Podemos perceber que, do

3×3 (7 pintados) para o 4×4 (8 pintados) que o número aumentou 1 unidade pintada. O fato se deve a sequência de quadrados pintados, do 2×2 para o 3×3, o número de quadrados pretos cresceu em 5 unidades enquanto o branco permaneceu igual, mas do 3×3 para o 4×4, o número de brancos aumentou 6, enquanto o preto somente 1. Em geral, se n é par, do $n \times n$ para o $(n+1) \times (n+1)$ o número de quadrados pretos cresce em $2n+1$ unidades, mas se n é ímpar cresce em apenas 1 unidade. Para o caso do quadrado $n \times n$, com n par, como a quantidade de casas pretas é igual a quantidade de casas brancas, a quantidade de casas pretas será $\frac{n^2}{2}$. Para o caso do quadrado $n \times n$, com n ímpar, percebemos que, a quantidade de casas pretas será $\frac{(n+1)^2}{2} - 1$ (devido as descobertas anteriores). Com efeito, para n par, $\frac{n^2}{2} + 2n + 1 = \frac{(n+2)^2}{2} - 1$ e, para n ímpar, $\frac{(n+1)^2}{2} - 1 + 1 = \frac{(n+1)^2}{2}$.
Usando estes fatos:

a) Num quadriculado de 14×14, usamos o padrão para pares: $\frac{14^2}{2} = 98$ casas pretas.

b) Para descobrirmos quando o quadrado tem 199 casas pintadas, vamos testar os casos:
Usando o padrão para n par, temos: $\frac{n^2}{2} = 199 \Leftrightarrow n^2 = 398$ mas e equação não tem solução inteira.
Usando o padrão para n ímpar, vemos que: $\frac{(n+1)^2}{2} - 1 = 199 \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{2} = 200 \Leftrightarrow (n+1)^2 = 400$. Achamos $(n+1) = 20$, donde $n = 19$, portanto o número de linhas será igual a 19.

16) (OPM Fase Inicial)

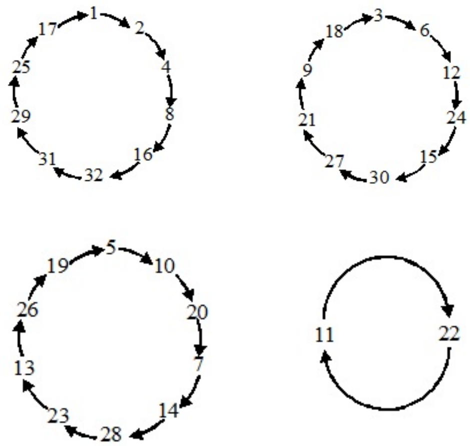
a) Na sequência esnúrfica $2, 3, 6, 23$, o quinto termo é a soma dos quatro primeiros mais o dobro da raiz quadrada da soma dos produtos de seus elementos tomados dois a dois, ou seja, é: $2+3+6+23+2\sqrt{(2.3+2.6+2.23+3.6+3.23+6.23)} = 34 + 2\sqrt{289} = 34 + 2.17 = 68$

b) Na sequência esnúrfica $2, 8$, o terceiro termo é: $2 + 8 + 2\sqrt{2.8} = 10 + 2\sqrt{16} = 10 + 2.4 = 18$

c) Na sequência esnúrfica $2, 8, 18$, o quarto termo é: $2+8+18+2\sqrt{(2.8+2.18+8.18)} = 28 + 2\sqrt{196} = 28 + 2.14 = 56$. E na sequência esnúrfica $2, 8, 18, 56$, o quinto termo é: $2+8+18+56+2\sqrt{(2.8+2.18+2.56+8.18+8.56+18.56)} = 84 + 2.\sqrt{1764} = 84 + 2.42 = 168$. Logo o quociente entre o 5^o e o 4^o termo da sequência esnúrfica iniciada com 2 e 8 é $\frac{168}{56} = 3$.

17) (OPM Fase Final)

a)



b) Observando o diagrama, temos que, após um número par de embaralhadas, as cartas numeradas 11 e 22 estão nas suas posições originais. Considerando agora os outros três diagramas, podemos concluir que, em menos do que 10 embaralhadas, as demais cartas não estavam nas suas posições originais. E exatamente na 10^a embaralhada todas elas voltam para as posições originais. Portanto o número mínimo de embaralhadas para ocorrer o Desembaralhatus! é 10. De fato, após $10.k$ embaralhadas, k natural , as cartas voltam para as posições originais.

18) (OBM 3^a Fase)

a) 5^o termo da sequência $S1$: 56781234 e 4^o termo da sequência $S2$: 9878561234567

b) O último termo da sequência $S1$ é: 45678123, pois quando se aumenta de 8 em 8, a sequência se repete, então o 2001^o número é igual ao 1^o. E o 2006^o número é igual ao 6^o.

c) Essa sequência tem 43 termos, pois se percebe que quando as posições aumentam de 7 em 7, os números ímpares permanecem no lugar e os pares andam 2 casas para a direita, só quando o número par estiver na penúltima posição que ele anda três casas; assim, como há 13 algarismos andando 5 vezes duas casas, os algarismos pares andam 10 casas para a direita, mas, no final da sequência, andam três casas, então andando 6×7 vezes, repete sequência. Como começa no número 1, na sequência há $6 \times 7 + 1$ termos igual a 43. (Pois a sequência acaba quando o número se repete).

19) (OBM 3^a Fase)

a) A sequência é $2008, 3119, 4220, 5331, 6442, 7553, 8664, 9775, 886, 997, 8, 9, 0$

b) Independente do dígito que ocupa a 1^a posição do número, após uma certa quantidade de operações, ele chegará a 9 e, basta mais uma operação para ele chegar a 0, que “desaparecerá”, e o número ficará assim com um dígito a menos. Em seguida, independente do dígito que agora ocupa a 2^a posição, após uma certa quantidade de operações ele também chegará a 9 e, logo depois, a 0, que também "desaparecerá", e o número terá assim outro dígito a menos. Continuando esse processo até o número ter um único dígito, esse dígito também chegará a 9 e, depois, a 0, encerrando o processo.