Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 3

Sequências

Uma sequência nada mais é do que um conjunto de números ordenados. Assim, podemos estabelecer um primeiro termo (a_1), um segundo termo (a_2), ... e o termo geral de uma sequência é escrito na forma a_n. Os problemas costumam informar qual é o valor de alguns termos e uma lei de formação para os demais termos. Se necessário, faremos uso de termos, que na sequência, são anteriores aos termos dados ou posteriores (que será mais raro).

Algumas vezes, essa lei de formação será implícita, ou seja, não poderemos calcular os termos diretamente a partir da posição que eles ocupam na sequência. Por exemplo, se cada termo é a soma dos dois termos imediatamente anteriores e os primeiro e segundo termos são iguais a 1. Possivelmente, precisaremos de uma lei explícita, que calcula um termo da sequência apenas a partir da posição que ele ocupa.

No parágrafo anterior, a sequência em questão é a famosa *Sequência de Fibonacci*. Na próxima aula, vamos aprender como encontrar seu termo geral.

1 Sequências simples

Problema 1. Mostre que a sequência definida por $a_n = n^2 + n + 2$ para $n \geq 1$, então na sequência $a_1, a_2, a_3, ...$ contém a_n quadrado perfeito, mas apenas em quantidade finita.

Solução. Inicialmente, veja que $a_1 = 4$, que é quadrado perfeito. Mas para $n > 1$, ocorre

$$n^2 < n^2 + n + 2 < n^2 + 2n + 1,$$

ou seja, a_n está situado entre 2 quadrados perfeitos consecutivos e, portanto, não pode ser um quadrado.

Problema 2. Uma sequência $\{a_n\}$ é definida por $a_1 = 2$ e, para $n \geq 2$, a_n é o maior divisor primo de $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} + 1$. Mostre que a_n nunca é igual a 5.

Solução. O máximo divisor primo de $a_1+1=3$ é $a_2=3$. Logo, se $n>2$, $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}+1$ não possui fatores 2 nem 3, ou seja, se $a_n=5$, então $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}+1=5^k$ ou $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}=5^k-1$, que é múltiplo de 4, uma contradição pois o único fator par do membro esquerdo dessa última equação é $a_1=2$.

Problema 3. (OBM) Considere a sequência oscilante:

$$1,2,3,4,5,4,3,2,1,2,3,4,5,4,3,2,1,2,3,4,...$$

Determine o 2003^o termo desta sequência.

Solução. Uma parte da sequência, com 8 algarismos, se repete: $1,2,3,4,5,4,3,2$. Dividindo 2003 por 8, obtemos 3 como resto, e deste modo, o 2003^o termo corresponde ao terceiro elemento da parte da sequência que se repete, isto é, 3.

Problema 4. (OBM-Adaptado) A sequência de algarismos $1,2,3,4,0,9,6,9,4,8,7,...$ é construída da seguinte maneira: cada elemento, a partir do quinto, é igual ao último algarismo da soma dos quatro anteriores. Os algarismos $2,0,0,4$, juntos e nesta ordem, aparecem na sequência?

Problema 5. Calcule a soma $1-2+3-4+\ldots-98+99-100$.

2 Somas Telescópicas

Vamos entender o que é uma soma telescópica através do nosso primeiro exemplo.

Problema 6. (EUA) Se $F(n+1)=\dfrac{2F(n)+1}{2}$ para $n=1,2,...$, e $F(1)=2$, então determine o valor de $F(101)$.

Solução. Podemos reescrever a equação que define os termos dessa sequência recursivamente (isto é, em função de termos anteriores) da seguinte forma:

$$F(n+1)-F(n)=\frac{1}{2}.$$

Assim, podemos escrever essas equações variando n de 100 a 1:

$$\begin{gathered}F(101)-F(100)=\frac{1}{2}\\ F(100)-F(99)=\frac{1}{2}\\ \vdots\\ F(3)-F(2)=\frac{1}{2}\end{gathered}$$

$$F(2) - F(1) = \frac{1}{2}$$

Somando *telescopicamente* todas essas equações, obtemos $F(101) - F(1) = 50$, ou seja, $F(101) = 52$ pois $F(1) = 2$.

Sequências como essa que acabamos de ver em que a diferença entre os valores dos termos consecutivos é constante são chamadas de Progressão Aritmética (P.A.).

Acho que deu pra entender o que é uma soma telescópica: são somas em que os termos intermediários são cancelados e, no final, só restam o primeiro e o último.

Pode até mesmo ser interessante escrever coisas do tipo

$$1 - n = (1-2) + (2-3) + ... + [(n-1) - n].$$

Vejamos agora mais um exemplo.

Problema 7. Encontre o valor da soma

$$S = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{999\times 1000}.$$

Solução. Essa é uma aplicação clássica para somas telescópicas. Observe que os denominadores são produtos de números consecutivos. Com o auxílio da identidade $\frac{1}{k\times(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, concluímos que

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000} \Rightarrow S = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}.$$

Problema 8. (EUA) Encontre a soma $\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + ... + \frac{1}{255\times 257}$.

Problema 9. (OBM) Encontre a soma $\frac{1}{1\times 4} + \frac{1}{4\times 7} + \frac{1}{7\times 10} + ... + \frac{1}{2998\times 3001}$.

Problema 10. (Hungria) Prove que para todos os inteiros positivos n,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}.$$

Solução. Veja

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right]$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}.$$

Observe que, apesar de muito semelhante aos problemas anteriores, este não utiliza soma telescópica.

Problema 11. O pagamento de um certo pintor aumenta de acordo com o dias em que ele trabalha. No primeiro dia ele recebeu 1 real. no segundo dia ele recebeu o que tinha ganho no primeiro dia mais 2 reais. No terceiro dia ele recebeu o que tinha recebido no segundo dia mais 3 reais. Desse modo, quanto o marceneiro irá receber no centésimo dia?

Solução. Seja L_n o valor pago no n-ésimo dia. O problema no diz que $L_{n+1} = L_n + (n+1)$. Vamos escrever várias equações seguidas:

$$\begin{array}{lcl} L_{n+1} & = & L_n + (n+1) \\ L_n & = & L_{n-1} + n \\ L_{n-1} & = & L_{n-2} + (n-1) \\ & \cdots & \\ L_2 & = & L_1 + 2 \end{array}$$

Somando tudo, obtemos um cancelamento de vários termos (soma telescópica), sobrando:

$$L_{n+1} = (n+1) + n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Problema 12. Prove que $S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ é um número inteiro.

Solução. A dica é racionalização dos denominadores:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} = -\left(\sqrt{1}-\sqrt{2}\right).$$

Repetindo o procedimento para as demais parcelas, chegamos a:

$$-S = \sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + ... + \sqrt{99} - \sqrt{100} = \sqrt{1} - \sqrt{100} = -99$$
$$\Leftrightarrow S = 99,$$

que é um número inteiro.

Problema 13. Determine o valor da expressão

$$E = \left[\frac{2002}{2 \cdot 6} + \frac{2002}{6 \cdot 10} + \frac{2002}{10 \cdot 14} + ... + \frac{2002}{1998 \cdot 2002}\right]^{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}}.$$

Problema 14. (EUA) A **Sequência de Fibonacci** $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$ começa com dois $1s$ e cada termo seguinte é a soma de seus dois antecessores. Qual dos dez dígitos (do sistema de numeração decimal) é o último a aparecer na posição das unidades na seqüência de Fibonacci?

Problema 15. (OBM) Determine o máximo divisor comum de todos os termos da sequência cujos termos são definidos por $a_n = n^3 - n$.

Problema 16. (EUA) Considere uma sequência u_n definida por $u_1 = 5$ e a relação

$$u_{n+1} - u_n = 3 + 4(n-1), n = 1, 2, 3, ...$$

Se u_n é expresso como um polinômio em n, determine a soma algébrica de seus coeficientes.

Solução. Podemos escrever

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= 3 + 4(n-2) \\ u_{n-1} - u_{n-2} &= 3 + 4(n-3) \\ &\vdots \\ u_2 - u_1 &= 3 + 4 \cdot 1 \end{aligned}$$

Somando todas essas equações, obtemos

$$u_n - u_1 = 3(n-1) + 4\left(1 + 2 + ... + (n-2)\right) = 3(n-1) + 2(n-1)(n-2)$$

$$\Rightarrow u_n = 2n^2 - 3n + 6,$$

cuja soma dos coeficientes é 5.

Problema 17. (Estônia) Prove a desigualdade

$$2010 < \frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + ... + \frac{2010^2+1}{2010^2-1} < 2010\frac{1}{2}.$$

Problema 18. Calcule a soma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$.

Problema 19. Considere a seqüência definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+n\cdot a_n}$. Calcule a_{2012}.

Solução. Começaremos com um artifício algébrico bastante útil que é observar que, na fórmula de a_{n+1}, a fração do membro direito pode ser melhor desenvolvida se for invertida, porque poderemos desmembrar o resultado. De fato, temos

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1 + n \cdot a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + n$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = n.$$

Assim, obtemos uma chamada *equação de diferença*. Variando o valor de n de forma decrescente de 2010 a 1, chegaremos a

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{a_{2011}} & - & \frac{1}{a_{2010}} & = & 2010 \\
\frac{1}{a_{2011}} & - & \frac{1}{a_{2010}} & = & 2009 \\
 & \vdots & & = & \vdots \\
\frac{1}{a_3} & - & \frac{1}{a_2} & = & 2 \\
\frac{1}{a_2} & - & \frac{1}{a_1} & = & 1
\end{array}$$

Somando essas 2010 equações membro a membro, obtemos

$$\frac{1}{a_{2011}} - \frac{1}{a_1} = 1 + 2 + ... + 2009 + 2010 = \frac{2010 \cdot 2011}{2} = 2021055$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{2011}} = 2021056.$$

Portanto, $a_{2011} = \frac{1}{2021056}$.

3 Produtos Telescópicos

A ideia é semelhante a das somas telescópicas, mas o cancelamento ocorre pelo produto e não por soma.

Problema 20. No ano 1 Papai Noel viajou sozinho para entregar seus presentes na noite de Natal. No ano seguinte, ele percebeu que precisava de um ajundante e contratou um Matesito (típico habitante do Pólo Norte). A cada ano, ele sempre precisava dobrar a quantidade de Matesitos e contratava mais Matesitos para guiar as renas. Quantos Matesitos Papai Noel vai precisar contratar no ano de 2012?

Solução. Seja L_n o número de Matesitos em cada ano. O problema no diz que $L_{n+1} = 2L_n + 1$. Somando 1 aos dois lados obtemos $L_{n+1} + 1 = 2(L_n + 1)$. Vamos escrever várias equações seguidas:

$$\begin{array}{rcl} L_{n+1} + 1 & = & 2(L_n + 1) \\ L_n + 1 & = & 2(L_{n-1} + 1) \\ L_{n-1} + 1 & = & 2(L_{n-2} + 1) \\ & \dots & \\ L_2 + 1 & = & 2(L_1 + 1) \end{array}$$

Multiplicando tudo, obtemos um cancelamento de vários termos (produto telescópico), sobrando:

$$L_{n+1} + 1 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \ldots \times 2}_{n+1 vezes} = 2^{n+1} \Rightarrow L_{n+1} = 2^{n+1} - 1.$$

Em particular, $L_{2012} = 2^{2012} - 1$.

Problema 21. Uma sequência é definida por $a_1 = 2$ e $a_n = 3a_{n-1} + 1$. Determine a soma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Problema 22. Considere a sequência recorrente definida por $a_1 = 14$ e $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Prove que o número $\sqrt{3\left(a_n^2 - 4\right)}$ é divisível por 4, $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$.

Solução. Primeiro, veja que $\sqrt{3\left(a_1^2 - 4\right)} = 24$. Observe que

$$a_{n+1} - 2 = a_n^2 - 4 = (a_n + 2)(a_n - 2).$$

Reduzindo os índices, obtemos também

$$a_n - 2 = (a_{n-1} + 2)(a_{n-1} - 2)$$

$$\vdots$$

$$a_3 - 2 = (a_2 + 2)(a_2 - 2)$$

$$a_2 - 2 = (a_1 + 2)(a_1 - 2)$$

Multiplicando todas essas equações *telescopicamente*, obtemos

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= (a_n + 2)(a_{n-1} + 2)...(a_1 + 2)(a_1 - 2) \\ \Leftrightarrow a_n^2 - 4 &= a_{n-1}^2 \cdot a_{n-2}^2 \cdot ... \cdot 16 \cdot 12 \\ \Leftrightarrow 3\left(a_n^2 - 4\right) &= a_{n-1}^2 \cdot a_{n-2}^2 \cdot ... \cdot 16 \cdot 36. \\ \Leftrightarrow \sqrt{3\left(a_n^2 - 4\right)} &= a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot ... \cdot 4 \cdot 6, \end{aligned}$$

que é múltiplo de 4.

Problema 23. Sejam $r_1 = 3$ e $r_n = r_{n-1}^2 - 2, \forall n \geq 2$. Se $s_n = r_n - 2$ para $n \geq 1$, prove que s_j tem, no mínimo, $2 \cdot 3^{j-2}$ divisores positivos, $j \geq 2$.

Problema 24. (EUA) Defina uma sequência de números reais $a_1, a_2, a_3, ...$ por $a_1 = 1$ e $a_{n+1}^3 = 99a_n^3, \forall n \geq 1$. Determine o valor de a_{100}.

Problema 25. Calcule o valor de $\dfrac{\left(10^4+324\right)\left(22^4+324\right)\left(34^4+324\right)\left(46^4+324\right)\left(58^4+324\right)}{\left(4^4+324\right)\left(16^4+324\right)\left(28^4+324\right)\left(40^4+324\right)\left(52^4+324\right)}$.

Problema 26. Qual é o valor do produto $\dfrac{8}{4} \cdot \dfrac{12}{8} \cdot \dfrac{16}{12} \cdot ... \cdot \dfrac{4n+4}{4n} \cdot ... \cdot \dfrac{2008}{2004}$?

Dicas

5. Agrupe os números aos pares.

8. Use $\dfrac{1}{k\cdot(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$.

9. Pense numa ideia semelhante à sugestão do problema 8.

13. Use mais uma vez uma ideia parecida com a do problema 8 e veja o problema 12.

14. Calcule os primeiros termos até chegar à resposta.

17. Use $\dfrac{n^2+1}{(n-1)(n+1)} = 1 + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$.

18. Fatore o denominador pondo $\sqrt{k}\sqrt{k+1}$ em evidência. Depois, racionalize o denominador multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ e surgirá uma soma telescópica.

21. Subtraindo as equações $a_n = 3a_{n-1} + 1$ e $a_{n-1} = 3a_{n-2} + 1$, obtemos $a_n - a_{n-1} = 3\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right)$. Depois, multiplique várias dessas equações seguidas (produto telescópico).

23. Veja problema 21.

24. Multiplique várias dessas equações seguidas (produto telescópico).

25. Use $a^4+18^2 = a^4+2a^2\cdot 18+18^2-36a^2 = \left(a^2+18\right)^2-(6a)^2=\left(a^2+6a+18\right)\left(a^2-6a+18\right)$.

Respostas

4. Não

5. -50

8. $\frac{128}{257}$

9. $\frac{1000}{3001}$

13. $2002^{\sqrt{99}}$

14. 6

15. 6

18. $\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}$

21. $\frac{5 \cdot 3^n - 2n - 5}{4}$

24. 99^{33}

25. 373

26. 502

Álgebra 03 - Sequências

Problema 1. Sabendo que a^2, b^2, c^2 formam uma progressão aritmética, nessa ordem. Prove que $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ também formam uma progressão aritmética na ordem dada.

Solução. Os números (x, y, z) formam uma P.A. se, e só se, $y = \frac{x+z}{2}$. Sendo assim, temos que $2b^2 = a^2 + c^2$. Utilizando isso, devemos mostrar que

$$2 \cdot \left(\frac{1}{c+a} \right) = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}.$$

Lembrando que $b+c$, $c+a$, $a+b$ são não nulos. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{c+a} = \frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2(a+b)(b+c) = (a+2b+c)(a+c) \\ &\Longleftrightarrow \quad 2b^2 = a^2 + c^2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{1}{b+c}, \quad \frac{1}{c+a}, \quad \frac{1}{a+b}$$

formam uma P.A. se, e somente se,

$$a^2, \quad b^2, \quad c^2$$

também formam. Isso conclui a demonstração.

Problema 2. Prove que, se a, b, c são respectivamente o p-ésimo, q-ésimo e r-ésimo termos de uma progressão aritmética, então

$$(q-r)a + (r-p)b + (p-q)c = 0.$$

Solução. Se a_n é o n-ésimo termo e a_m é o m-ésimo termo da progressão aritmética, então nós temos

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_m = a_1 = d(m-1),$$

onde d é a razão da progressão. Daí,

$$a_n - a_m = (n-m)d.$$

Por hipótese, nós temos as seguintes igualdades

$$b - c = (q-r)d,$$

$$c - a = (r - p)d,$$

$$a - b = (p - q)d.$$

Multiplocando a primeira equação por a, a segunda por b, e a terceira por c, nós temos

$$d[(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c] = a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0,$$

onde

$$(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0.$$

Problema 3. Uma sequência de termos positivos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ satisfaz a relação recursiva $A_{n+1} = \dfrac{3(1 + A_n)}{3 + A_n}$. Para que valores de A_1 a sequência é monótona decrescente (isto é, $A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_n \geq \ldots$)?

Solução. Devemos ter $A_n \geq A_{n+1}$ para todo n natural.

$$\begin{aligned} A_n \geq \frac{3(1 + A_n)}{3 + A_n} \quad &\iff \quad (3 + A_n)A_n \geq 3 + 3A_n \\ &\iff \quad A_n^2 \geq 3. \end{aligned}$$

Logo, devemos ter $A_n \geq \sqrt{3}$ para todo n. De forma que $A_1 \geq \sqrt{3}$ é condição necessária para que a sequência seja monôtona decrescente. Vamos verificar se isso é condição suficiente.
Devemos garantir que $A_n \geq \sqrt{3}$ para todo n. Ou seja,

$$\begin{aligned} A_{n+1} \geq \sqrt{3} \quad &\iff \quad \frac{3(1 + A_n)}{3 + A_n}\sqrt{3} \\ &\iff \quad 3 + 3A_n \geq 3\sqrt{3} + A_n\sqrt{3} \\ &\iff \quad A_n \geq \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{3 - \sqrt{3}} \\ &\iff \quad A_n \geq \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \\ &\iff \quad A_n \geq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ou seja, $A_1 \geq \sqrt{3}$ garante $A_n \geq \sqrt{3}$ para todo n. De forma que $A_1 \geq \sqrt{3}$ é condição suficiente para que a sequência satisfaça as condições enunciadas. Isto é, a sequência é monôtona decrescente se, e só se, $A_1 \geq \sqrt{3}$.

Problema 4. Seja $x = 101! \cdot \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{99}{100!}\right)$. Encontre $101! - x$.

Solução. Escrevamos $x = 101! \cdot A$.

Note que $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$. Então,

$A = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{98!} - \frac{1}{99!}\right) + \left(\frac{1}{99!} - \frac{1}{100!}\right) = 1 - \frac{1}{100!}$.

Dessa forma, agora nós temos

$$101! - x = 101! - 101! \cdot \left(1 - \frac{1}{100!}\right) = \frac{101!}{100!} = 101.$$

Problema 5. Considere uma sequência definida recursivamente por $x_n = x_{n-1} + 2n$ e $x_0 = 0$. Encontre uma expressão não recursiva para o termo geral x_n.

Solução. Observe que

$$x_n = x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} + x_{n-2}) + \ldots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0).$$

Sabemos que para todo k inteiro positivo $x_{k+1} - x_k = 2(k+1)$. Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= 2n + 2(n-1) + 2(n-2) + \ldots + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1. \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1). \end{aligned}$$

Problema 6. Prove a identidade

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Solução. Fazendo

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)}$$

temos $n(A+B) + 2A = 1$. Portanto, $A + B = 0$ e $A = 1/2$. De forma que

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Daí, se

$$S = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

então

$$S = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right].$$

Eliminando os termos do meio encontramos

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Problema 7. Calcule

$$A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

Solução. $(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = 1$. Logo, $\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

Temos então que

$$A = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1.$$