Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 1

Prof. Bruno Holanda & Emiliano Chagas

Aula 1

Áreas I

A área de uma figura plana é um conceito primitivo de Geometria Plana que é difícil de formalizar de maneira rigorosa, mas fácil de se entender de maneira intuitiva. Para facilitar nosso entendimento, estudaremos as áreas das figuras planas a partir de três premissas básica que iremos assumir como verdadeiras. São elas:

Premissa I. A área de um retângulo de comprimento x e altura y é dado por xy.

Premissa II. Se uma figura plana é dividida em dois ou mais pedeços, a soma das áreas dos pedaços é igual à área da figura original.

Premissa III. Se duas figuras são idênticas, então possuem a mesma área.

Veremos agora como podemos calcular a área de paralelogramos e triângulos a partir dessas premissas. Em primeiro lugar, veja que um paralelogramo pode ser separado em duas partes (um triângulo e um quadrilátero) através de uma altura que passa por um de seus vértices. Essas duas partes podem ser rearranjadas de modo a formar um retângulo de acordo com a figura:

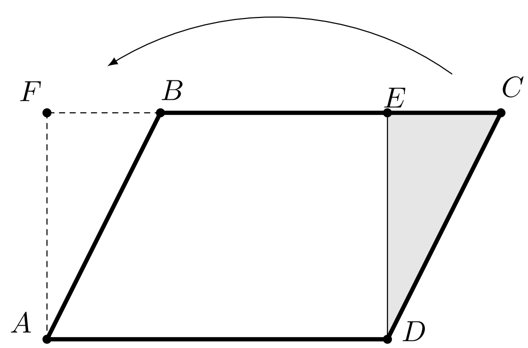
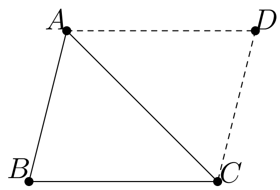


Figura 1: Veja que a área do paralelogramo $ABCD$ é igual à área do retângulo $ADEF$.

Assim, se B é a medida do lado horizontal do paralelogramo (que chamaremos de *base*) e h é a medida da altura, podemos verificar que a área desse paralelogramo é igual a $B \times h$.

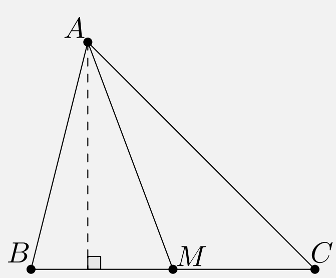


Para descobrirmos a área de um triângulo ABC, trace uma paralela ao lado BC passando por A e uma paralela ao lado AC passando por B. Se D é o ponto de encontro entre essas duas paralelas, veja que $ABCD$ é um paralelogramo e que os triângulos ABC e ACD são idênticos. Agora, sendo B a medida da base BC e h a altura do triângulo, pelo o que vimos anteriormente, sabemos que a área do paralelogramo $ABCD$ é igual a $B \times h$. Por outro lado, esse paralelogramo pode ser divido em duas partes iguais (os triângulos ABC e BCD). Portanto, cada um terá área igual a $\frac{B \times h}{2}$.

> **Notação:** Utilizaremos *colchetes* para denotar áreas de figuras. Por exemplo, a área do triângulo ABC será denotada por $[ABC]$ e a área do quadrilátero $XYZW$ será denotada por $[XYZW]$.

Para finalizar a parte teórica neste capítulo, iremos demonstrar o seguinte resultado:

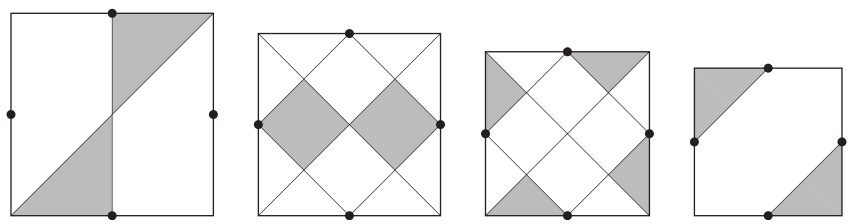
Fato Importante. Se ABC é um triângulo e M é o ponto médio do lado BC, então as áreas dos triângulos ABM e AMC são iguais.



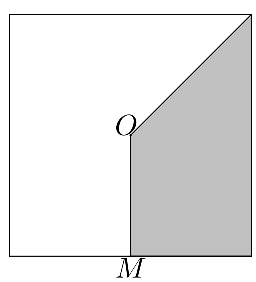
Demonstração. Note que os dois triângulos têm a mesma altura e a mesma medida de base, pois $BM = MC$ (por definição). Logo, utilizando a fórmula de área para triângulos, o resultado é imediato.

Problemas Introdutórios

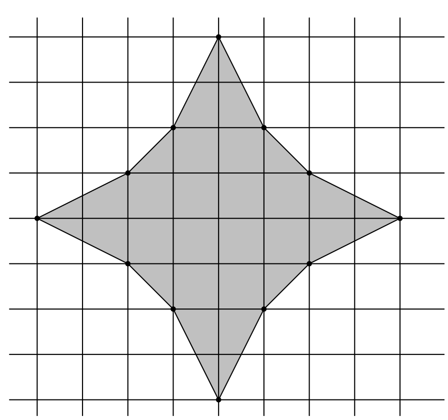
Problema 1. (OBMEP 2015 - 1ª Fase) Os pontos destacados nos quadrados abaixo são pontos médios dos lados. Quantos desses quadrados têm área sombreada igual a $\frac{1}{4}$ de sua área?



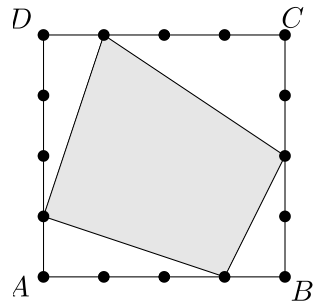
Problema 2. (OBMEP 2017 - 1ª fase) A figura mostra um quadrado de centro O e área 20 cm 2. O ponto M é o ponto médio de um dos lados. Qual é a área da região sombreada?



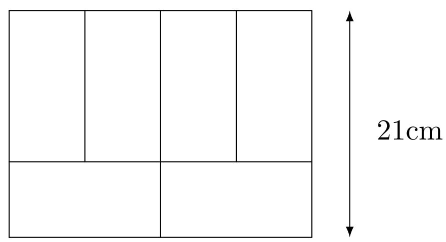
Problema 3. (OBMEP 2017 - 1ª Fase) A área da figura é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?



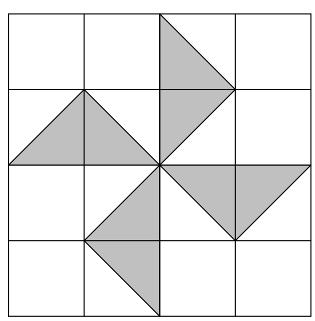
Problema 4. Cada lado do quadrado $ABCD$ de lado quatro é dividido em partes iguais por três pontos. Escolhendo um ponto (dos três internos) em cada lado podemos formar um quadrilátero cinza. Qual é a área desse quadrilátero?



Problema 5. (OBM 2005 - 1ª Fase) Seis retângulos idênticos são reunidos para formar um retângulo maior conforme indicado na figura. Qual é a área deste retângulo maior?

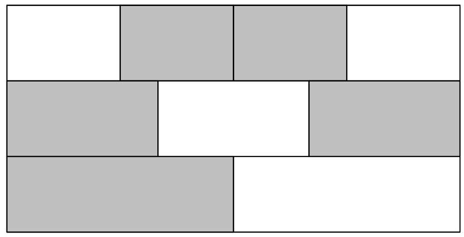


Problema 6. (OBMEP 2010 - 1ª Fase) A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A área em sombreado corresponde a que fração da área do quadrado?

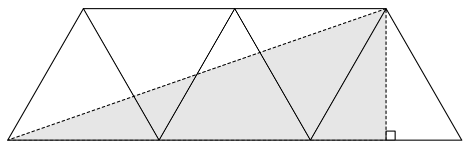


Problemas Propostos

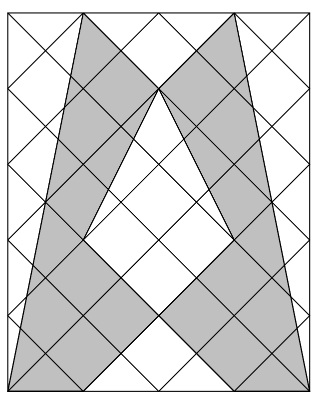
Problema 7. (OBMEP 2013 - 1ª Fase) A figura representa um retângulo de área 36 m^2, dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas?



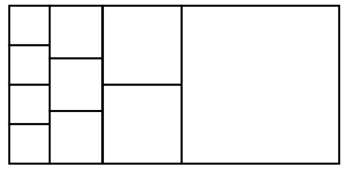
Problema 8. (OBMEP 2009 - 1ª Fase) A figura mostra cinco triângulos equiláteros. A que fração da área da figura corresponde a área sombreada?



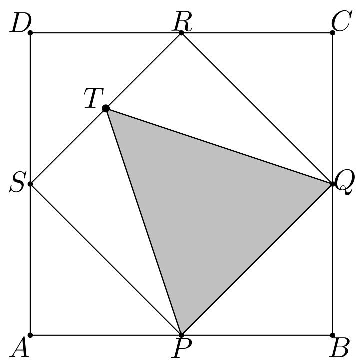
Problema 9. (OBMEP 2012 - 1ª Fase) O retângulo ao lado, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual é a área da região sombreada?



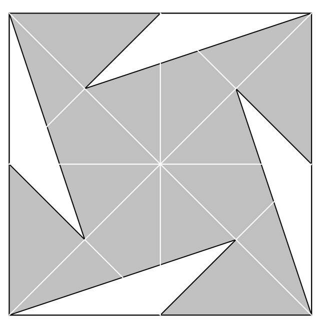
Problema 10. (OBM 2011 - 1ª Fase) O retângulo da figura abaixo está dividido em 10 quadrados. As medidas dos lados de todos os quadrados são números inteiros positivos e são os menores valores possíveis. Qual é a área desse retângulo?



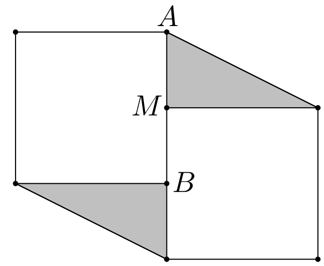
Problema 11. (OBMEP 2009 - 1ª Fase) Na figura, o quadrado ABCD tem área 40 cm^2 . Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?



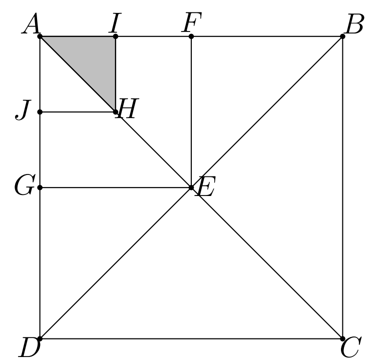
Problema 12. (OBMEP 2010 - 1ª Fase) A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área em cinza corresponde a que fração da área do quadrado?



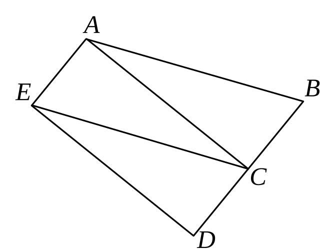
Problema 13. (OBMEP 2015 - 1ª Fase) A figura abaixo é formada por dois quadrados de lado 6 cm e dois triângulos. Se M é o ponto médio de AB, qual é a área total da figura?



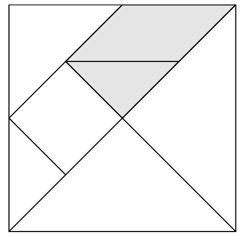
Problema 14. (OBM 2004 - 2a Fase) No desenho, os quadriláteros ABCD, EFAG e IAJH são retângulos e H é ponto médio de AE. Calcule a razão entre a área do retângulo ABCD e o triângulo AHI.



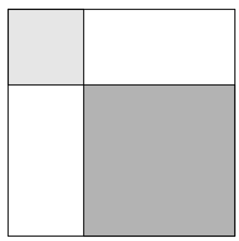
Problema 15. (OBM 2009 - 1ª Fase) Na figura, C é um ponto do segmento BD tal que $ACDE$ é um retângulo e $ABCE$ é um paralelogramo de área 22 cm^2. Qual é a área de $ABDE$, em cm^2?



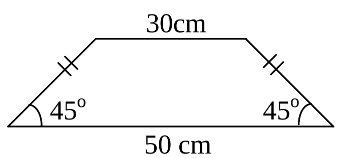
Problema 16. (OBM 2006 - 1ª Fase) A figura a seguir representa um Tangram, quebra-cabeças chinês formado por 5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sabendo que a área do Tangram a seguir é 64 cm^2 , qual é a área, em cm^2, da região sombreada?



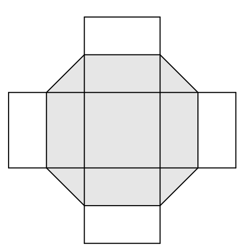
Problema 17. (OBM 2015 - 1ª Fase) Com dois cortes perpendiculares, Pablo dividiu uma folha de madeira quadrada em dois quadrados, um de área 400 cm^2 e outro de área de 900 cm^2 e mais dois retângulos iguais, conforme desenho. Qual é a área da folha de madeira?



Problema 18. (OBM 2008 - 1ª Fase) Juntando quatro trapézios iguais de bases 30 cm e 50 cm, como o da figura ao lado, podemos formar um quadrado de área 2500 cm^2 , com um buraco quadrado no meio. Qual é a área de cada trapézio, em cm^2 ?

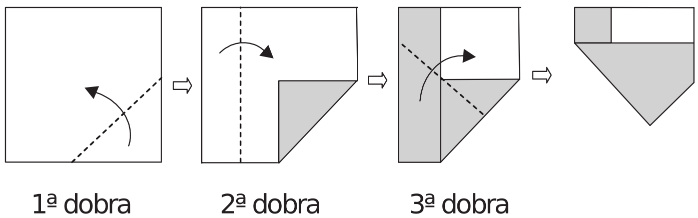


Problema 19. (OBMEP 2006 - 1ª Fase) Na figura, os cinco quadrados são iguais e os vértices do polígono sombreado são pontos médios dos lados dos quadrados. Se a área de cada quadrado é 1 cm^2 , qual a área do polígono sombreado?

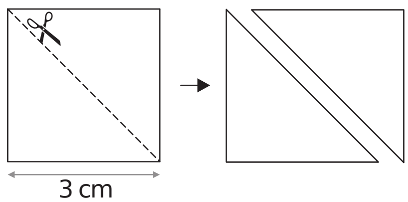


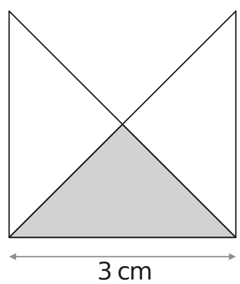
Problema 20. (OBMEP 2016 - 1ª Fase) Alice fez três dobras numa folha de papel quadrada de lado 20 cm, branca na frente e cinza no verso. Na primeira dobra, ela fez um vértice

coincidir com o centro do quadrado e depois fez mais duas dobras, como indicado na figura. Após a terceira dobra, qual é a área da parte cinza da folha que ficou visível?

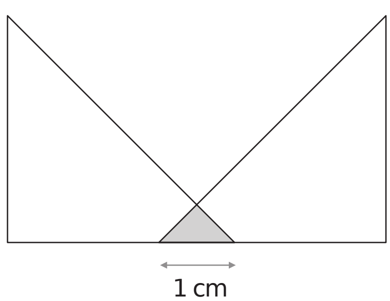


Problema 21. (OBMEP 2009 - 2a Fase) Um quadrado de lado 3 cm é cortado ao longo de uma diagonal em dois triângulos, como na figura. Com esses triângulos formamos as figuras dos itens (a), (b) e (c), nas quais destacamos, em cinza, a região em que um triângulo fica sobre o outro. Em cada item, calcule a área da região cinza.

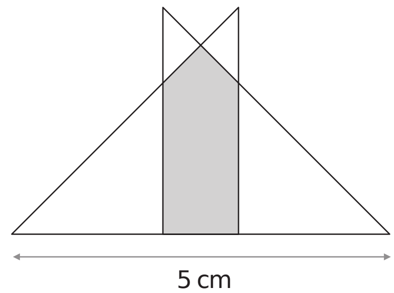




a)

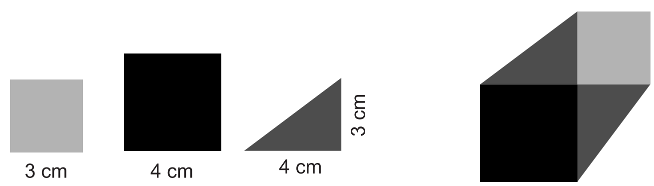


b)



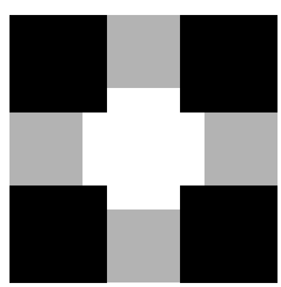
c)

Problema 22. (OBMEP 2013 - 2a Fase) Dafne tem muitas peças de plástico: quadrados cinzas claros de lado 3 cm, quadrados pretos de lado 4 cm e triângulos retângulos cinzas cujos lados menores medem 3 cm e 4 cm, como mostrado à esquerda. Com estas peças e sem sobreposição, ela forma figuras como, por exemplo, o hexágono à direita.

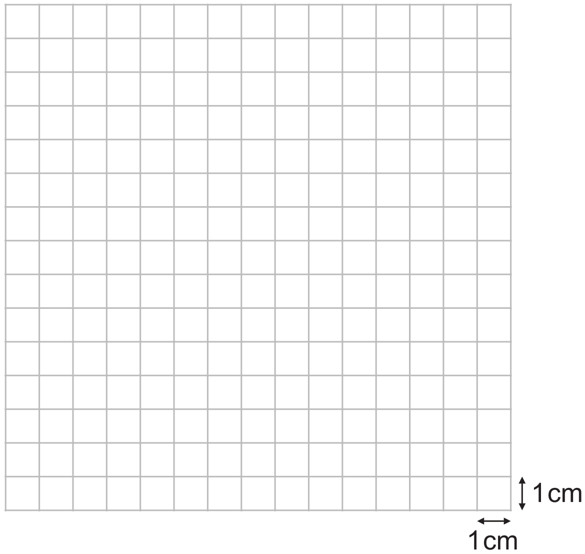


a) Qual é a área do hexágono que Dafne formou?

b) Usando somente peças quadradas, Dafne formou a figura ao lado, com um buraco em seu interior. Qual é a área do buraco?

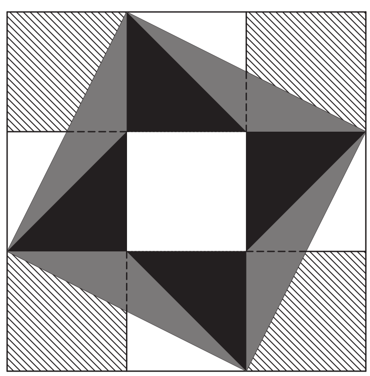


c) Mostre como Dafne pode preencher, sem deixar buracos, um quadrado de lado 15 cm com suas peças, sendo apenas uma delas um quadrado de lado 3 cm.



d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

Problema 23. (OBMEP 2016 - 2a Fase) A figura ao lado foi desenhada sobre um quadriculado formado por nove quadradinhos, cada um com área igual a 4 cm^2.

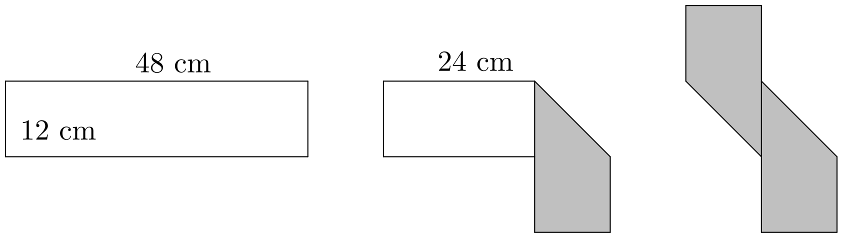


a) Qual é a área total pintada de preto?

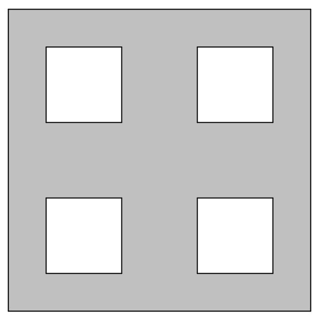
b) Qual é a área total listrada?

c) Qual é a área total pintada de cinza?

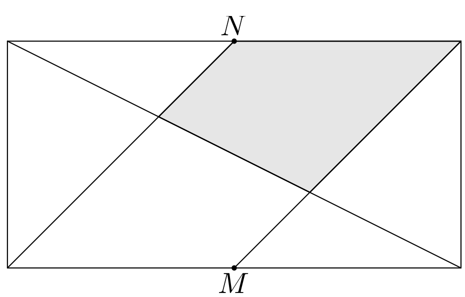
Problema 24. (OBMEP 2008 - 1ª Fase) Uma tira retangular de cartolina, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura, formando um polígono de 8 lados. Qual é a área desse polígono?



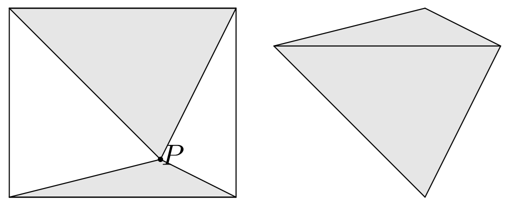
Problema 25. (OBMEP 2010 - 1ª Fase) A figura mostra quatro quadrados iguais dentro de umquadrado maior. A área em cinza é 128 cm^2 e a área de cada quadrado menor é igual a 9% da área do quadrado maior. Qual é a área do quadrado maior?



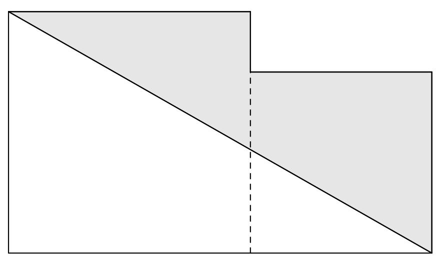
Problema 26. (OBMEP 2013 - 1ª Fase) A figura representa um retângulo de 120 m^2 de área. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem. Qual é a área da região sombreada?



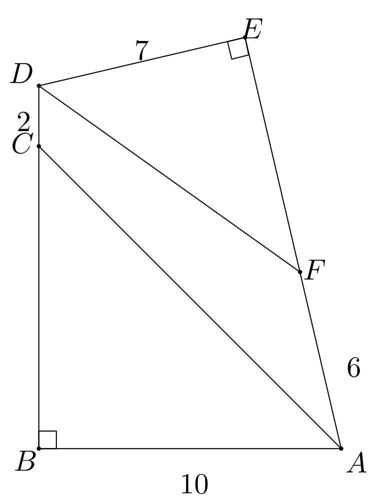
Problema 27. (OBMEP 2013 - 1ª Fase) Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento 12 cm e largura 10 cm. Ela escolheu um ponto P no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados como na fi gura. Com esse s triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual é a área do quadrilátero?



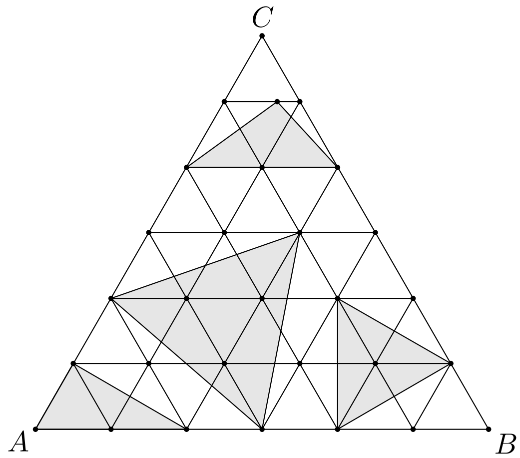
Problema 28. (OBMEP 2014 - 1ª Fase) A figura é formada por dois quadrados, um de lado 8 cm e outro de lado 6 cm. Qual é a área da região sombreada?



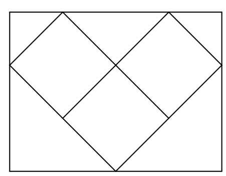
Problema 29. (OBMEP 2016 - 1ª Fase) Na figura, os pontos C e F pertencem aos lados BD e AE do quadrilátero ABDE, respectivamente. Os ângulos B e E são retos e os segmentos AB, CD, DE e FA têm suas medidas indicadas na figura. Qual é a área do quadrilátero ACDF?



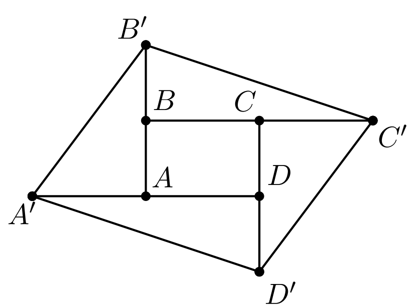
Problema 30. (OBMEP 2016 - 1ª Fase) O triângulo equilátero ABC da figura é formado por 36 triângulos equiláteros menores, cada um deles com área 1. Qual é a soma das áreas dos quatro triângulos sombreados?



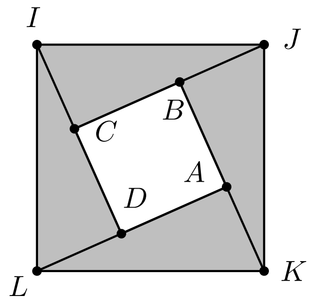
Problema 31. (OBM) Na figura a seguir, temos três quadrados de área 1, qual é a área do retângulo que o contorna?

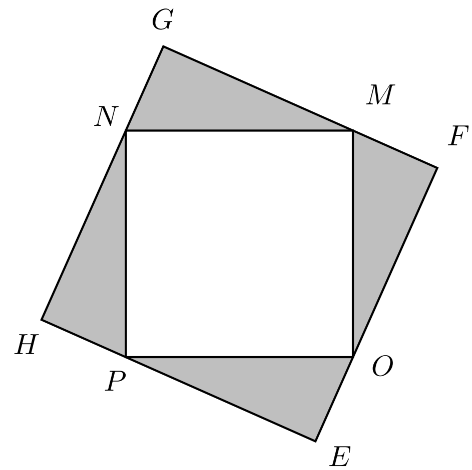


Problema 32. Na figura abaixo $ABCD$ é um retângulo de área $11cm^2$. Sabemos também que $A'A = AD$, $BB' = BA$, $CC' = CB$ e $DD' = DC$. Determine a área do quadrilátero $A'B'C'D'$.



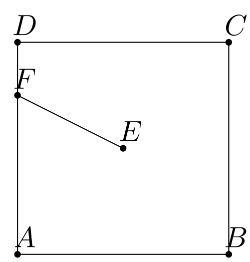
Problema 33. (OBM 2005) Quatro peças iguais, em forma de triângulo retângulo, foram dispostas de dois modos diferentes, como mostram as figuras.





Os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ têm lados respectivamente iguais a 3 cm e 9 cm. Calcule as áreas dos quadrados $IJKL$ e $MNOP$.

Problema 34. João dividiu uma folha de papel quadrada, com 20cm de lado, em 5 pedaços de mesma área. O primeiro corte teve início no centro do quadrado e prolongou-se até a fronteira do papel a 7cm de um canto, como indicado na figura seguinte.

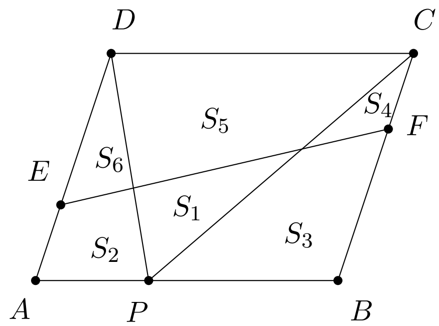


Sabendo que o João fez todos os cortes em linha recta a partir do centro do quadrado, de que forma cortou o papel?

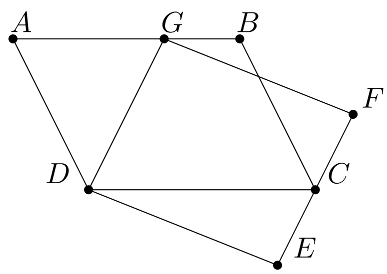
Problema 35. Na figura, $ABCD$ é paralelogramo e $AE = CF$. Seja P um ponto qualquer sobre o lado AB. Mostre que

a) $S_5 = S_2 + S_3$.

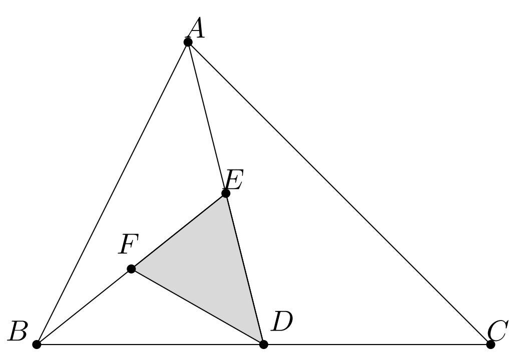
b) $S_1 = S_4 + S_6$.



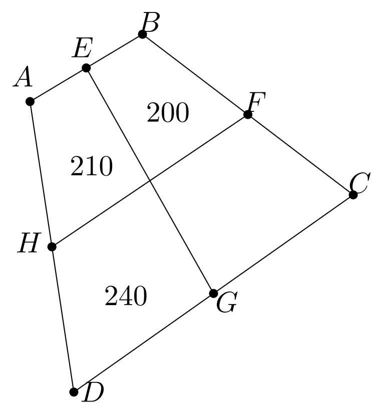
Problema 36. Na figura abaixo $ABCD$ e $DEFG$ são paralelogramos. Além disso, C está sobre FE e G estpa sobre AB. Prove que ambos paralelogramos têm a mesma área.



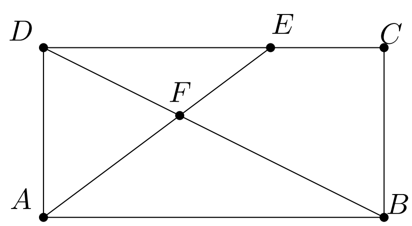
Problema 37. Na figura a seguir, ABC é um triângulo de área 72 e D, E, F são pontos médios. Ache a medida da área do triângulo DEF.



Problema 38. Na figura abaixo E, F, G, H são pontos médios. Determine a área do quadrilátero que está faltando.



Problema 39. (Maio 2011) No retângulo $ABCD$, $BC = 5$ e $3EC = CD$. Seja F o ponto de encontro entre DB e AE. Se a área do ΔFDE é 12 e a área do ΔFAB é 27, calcule a área do retângulo.



Problema 40. (Proposto para IMO) Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo e M e N os pontos médios dos lados BC e DA, respectivamente. Prove que $[DMA] + [CNB] = [ABCD]$.

Problema 41. (OBM) Sobre cada lado de um triângulo de área $10cm^2$ foi construído um quadrado. Em seguida, foram construídos três triângulos usando um vértice do triângulo e dois vértices dos quadrados, como mostrado na Figura 1. Depois, os quadrados foram retirados e cada um dos triângulos construídos foi girado até um de seus lados coincidir com um lado do triângulo inicial. Qual é a área da Figura 2, formada pelos quatro triângulos?

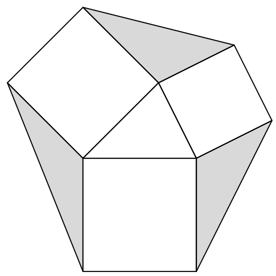


Figura 1

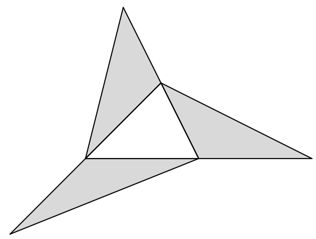
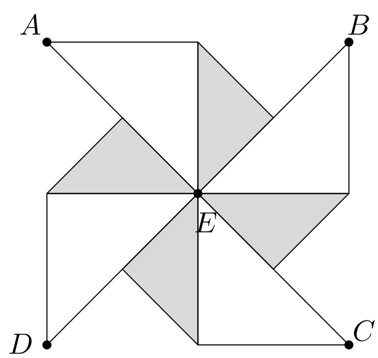


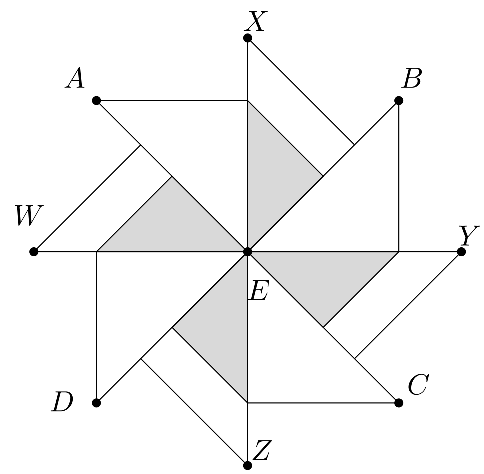
Figura 2

Problema 42. (OBM 2013) Paulo possui uma folha de papel $ABCD$ quadrada de lado $20cm$. A frente da folha é branca e o verso é cinza. O ponto E é marcado no centro da folha. Ele decide fazer um cata-vento com a folha. Para isso, ele recorta o segmento BE e dobra a ponta que estava no ponto B até o ponto E. Ele repete o procedimento para cada um dos outros três vértices do quadrado, completando o cata-vento.

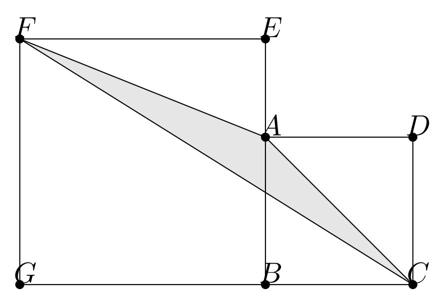


a) Qual a razão entre a área cinza e a área branca na figura anterior?

b) Paulo pegou outra folha quadrada $XYZW$ igual à folha $ABCD$ e montou outro cata-vento. Ele girou o cata-vento $XYZW$ de um ângulo de $45°$ e colocou sobre o cata-vento $ABCD$ de modo que os centros das folhas ficassem sobrepostos, montando a figura a seguir. Qual a área branca da figura formada?

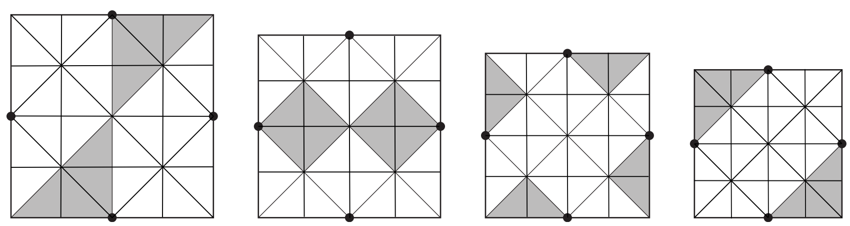


Problema 43. Na figura, $ABCD$ é um quadrado de lado 10cm e $BEFG$ um outro quadrado de lado maior. Qual é o valor da área do triângulo ACF?

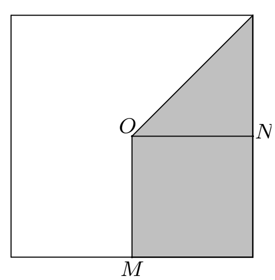


Dicas e Soluções

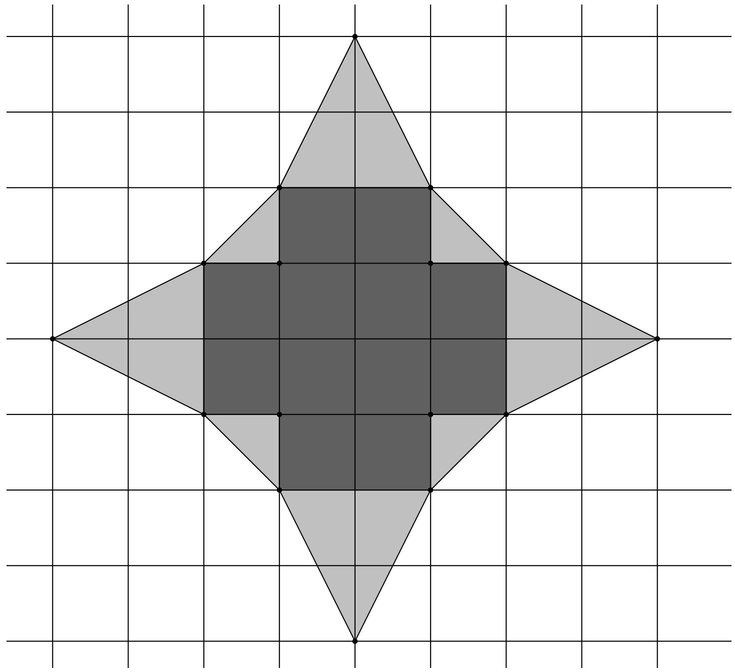
1. Em todas as quatro figuras, a área sombreada é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado correspondente. Uma maneira simples de confirmar isto é contar, em cada caso, o número de triângulos sombreados que são formados nas decomposições abaixo (8 triângulos sombreados para um total de 32 triângulos, isto é, $\frac{8}{32}$ ou $\frac{1}{4}$)



2. Podemos decompor a figura sombreada em um quadrado e um triângulo, traçando um segmento de O até o ponto médio N do lado do quadrado, conforme indicado na figura. Assim, a área da região sombreada é igual a $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ da área do quadrado com centro em O, ou seja, a área sombreada é igual a $5 + 2,5 = 7,5$ cm.



3. Observe que a figura é formada por 12 quadradinhos inteiros, em cinza escuro, cada um com área 1; por 4 triângulos de base 2 e altura 2, cada um com área $2\times\frac{2\times 2}{2} = 2$; e por 4 metades de quadrados de lado 1, cada um com área $\frac{1}{2}$. Logo, a área total da figura equivale a $12 \times 1 + 4 \times 2 + 4 \times 1 = 22$ quadradinhos.



4. A área do quadrilátero cinza é igual a área do quadrado menos a soma das áreas dos triângulos brancos. Ou seja,

$$4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 1}{1} + \frac{3 \cdot 1}{2} \right) = 16 - 10 = 6.$$

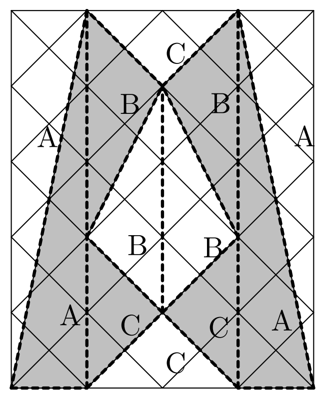
5. A partir da figura, vemos que o comprimento a dos retângulos menores é o dobro da sua largura b. Temos então que $a + b = b + 2b = 3b = 21$, ou seja, $b = 7$ cm e $a = 14$ cm. Portanto, o comprimento do retângulo maior é $4b = 28$ e a sua área é $21 \times 28 = 588\ cm^2$.

6. O quadrado está dividido em 16 quadradinhos. A área sombreada é a soma das áreas de 8 triângulos iguais, cada um com área igual a metade da área de um quadradinho. Portanto, a área sombreada é igual à área de $8 \times \frac{1}{2} = 4$ quadradinhos, o que corresponde a $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ da área do quadrado.

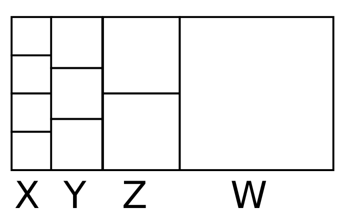
7. Como as faixas são retângulos de mesmas dimensões, elas têm a mesma área, que é $36 \div 3 = 12\ m^2$. Segue que, na faixa inferior, a área de cada parte é $12 \div 2 = 6\ m^2$, essa é a área da parte cinza; na faixa do meio, a área de cada parte é $12 \div 3 = 4$, as duas partes cinzas têm então área total igual a $2 \times 4 = 8\ m^2$; na faixa de cima, a área de cada parte é $12 \div 4 = 3$, as três partes cinzas têm então área total igual a $2 \times 3 = 6\ m^2$. A área total da região colorida de cinza é, portanto, $6+8+6 = 20\ m^2$.

8. Podemos decompor a figura no paralelogramo $ABCD$ e no triângulo BEC. Em cada uma destas figuras a área sombreada corresponde a metade da área, e assim a área sombreada na figura original é a metade da área total.

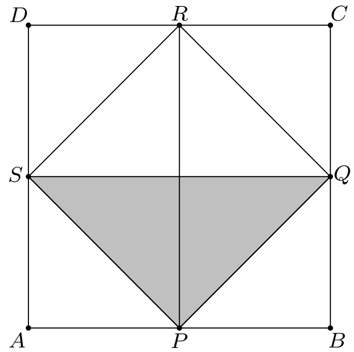
9. Dividimos a figura em regiões indicadas pelas letras A, B e C, como mostrado ao lado. Regiões com a mesma letra são idênticas, e tanto a parte branca quanto a parte cinzenta consistem de duas regiões A, duas regiões B e duas regiões C; segue que a área da parte cinzenta é igual à área da parte branca. Cada uma dessas áreas é então a metade da área total do retângulo, que é $4 \times 5 = 20\ cm^2$. Logo a área da parte cinzenta é $10\ cm^2$.



10. Cada quadrado da coluna X tem lado de medida igual a $\frac{1}{4}$ da medida do quadrado da coluna W, cada quadrado da coluna Y tem lado igual a $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado da coluna W e cada quadrado da coluna Z tem lado igual a $\frac{1}{2}$ do lado do quadrado da coluna W. Assim, o menor valor para o lado do quadrado W é o menor múltoplo comum entre 2, 3 e 4, que é 12 e os lados dos quadrados das colunas X, Y e Z são, respectivamente, 3, 4 e 6. Portanto as dimensões do retângulo são $3+4+6+12 = 25$ e 12, cuja área é $25 \times 12 = 300$.



11. Veja que $PQRS$ também é um quadrado e os lados RS e PQ são paralelos. Perceba que o triângulo PQT e PQS possuem a mesma área, uma vez que: os dois possuem o lado PQ em comum; e como S e T pertencem ao lado RS, paralelo ao lado PQ, a altura dos dois triângulos tem a mesma medida. Finalmente, ao traçarmos o segmento PR, percebemos pela figura que temos 8 triângulos congruentes, cada triângulo possui uma área de $\frac{40}{8} = 5\ cm^2$. Finalmente temos que $[PQT] = 2 \times 5 = 10\ cm^2$.



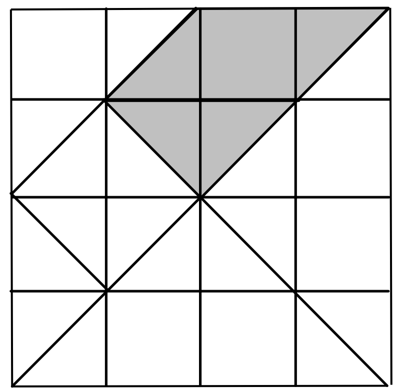
12. O quadrado está dividido em quatro quadrados menores iguais. Cada um dos triângulos brancos tem um lado que é um lado de um quadrado menor e sua altura, relativa a este lado, é a metade do lado do quadrado menor; logo sua área é $\frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ da área de um quadrado menor. Como são quatro desses triângulos, vemos que a área da parte branca é igual à área de $4 \times \frac{1}{4} = 1$ quadrado menor. Como área de um desses quadrados é $\frac{1}{4}$ da área do quadrado maior, segue que a área preta é igual a $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ da área do quadrado maior.

13. Como os quadrados estão dispostos de forma que os pontos A, M e B estão alinhados, e como M é o ponto médio de AB, segue que os dois triângulos da figura são triângulos retângulos, com catetos medindo 6 e 3 centímetros. Assim, a área de cada quadrado é $6 \times 3 = 36\ cm^2$ e a área de cada triângulo é $\frac{6 \times 3}{2} = 9\ cm^2$. A área total da figura é $36 + 36 + 9 + 9 = 90\ cm^2$.

14. $[ABCD] = 4 \times [AFEG]$ e $[AFEG] = 4 \times [AIHJ]$, logo $[ABCD] = 16 \times [AIHJ]$. Mas $[AIHJ] = 2 \times [AHI]$, portanto $[ABCD] = 32 \times [AHI]$. Então $\frac{[ABCD]}{[AHI]} = 32$.

15. Como $ACDE$ é um retângulo então $AE = CD$ e $AE \parallel CD$, além disso, como $ABCE$ é um paralelogramo, $AE = BC$ e $AE \parallel BC$. Como $AE = CD = BC$ e $AE \parallel BD$, então as áreas dos triângulos ABC , ACE e CDE são iguais. Além disso, as áreas dos triângulos ABC e ACE são iguais a 11, assim a área de $ABDE$ é 33.

16. Colocando o Tangram sobre uma malha quadriculada, a região sombreada ocupa 3 quadradinhos da malha e sua área é, portanto, $\frac{3}{16}$ da área do Tangram, ou seja, $\frac{3}{16} \times 64 = 12\ cm^2$.

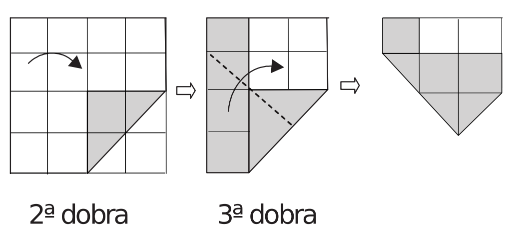


17. Como $400 = 20^2$, o quadrado menor tem lado 20 cm, e como $900 = 30^2$, o quadrado maior tem lado 30 cm. Portanto a folha de madeira tem lado $20 + 30 = 50$ cm e a sua área é $50^2 = 2500\ cm^2$.

18. Juntando os quatro trapézios, formamos um quadrado de área 2500 cm^2. Como o buraco quadrado no meio tem área $30 \times 30 = 900\ cm^2$, a área de cada um dos 4 trapézios, em cm^2 , é $\dfrac{2500 - 900}{4} = \dfrac{1600}{4} = 400$.

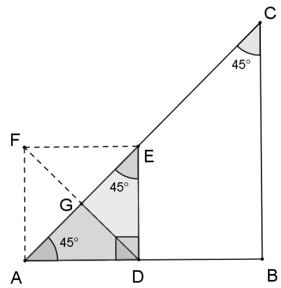
19. A região sombreada é formada pelo quadrado central, quatro retângulos cada um com metade da área de um quadrado e quatro triângulos cada um com um oitavo da área de um quadrado. Logo a área da região sombreada é $1 + 4 \times \dfrac{1}{2} + 4 \times \dfrac{1}{8} = 3,5$ cm.

20. Podemos colocar a folha de papel sobre um quadriculado 4×4 que a divide inicialmente em 16 quadradinhos iguais. Cada um desses quadradinhos tem área igual a 25 cm^2, pois o lado da folha de papel mede 20 cm. A figura abaixo ilustra a situação a partir da segunda dobra.

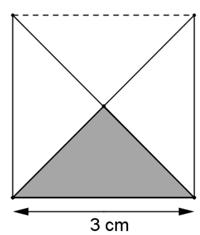


Assim, a área da parte cinza que ficou visível é de $3 \times 25 + 3 \times \dfrac{25}{2} = 112,5\ cm^2$.

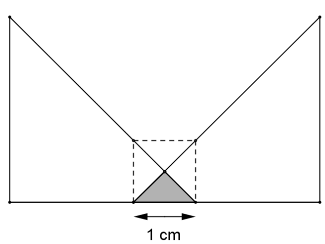
21. O argumento geral para a resolução desta questão está ilustrado ao lado. O triângulo ABC é um dos triângulos resultantes do corte do quadrado e D é um ponto qualquer no lado AB, com DE perpendicular a AB. O triângulo ADE também é retângulo com dois lados iguais, e sua área é igual a metade da área do quadrado $ADEF$; a área do triângulo ADG é então igual a $\dfrac{1}{4}$ da área do quadrado $ADEF$.



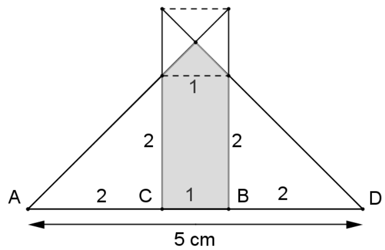
a) O argumento acima mostra que a região cinza (à esquerda) tem área igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 3 cm, ou seja, $\frac{1}{4} \times 3^2 = \frac{9}{4} = 2,25cm^2$. Podemos também usar a fórmula da área de um triângulo. A altura relativa ao lado de 3 cm mede a metade do lado do quadrado, ou seja, $\frac{3}{2}$ cm. A área da região cinza é então metade da base vezes altura, ou seja, $\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2,25\ cm^2$.



b) Aqui, a área da região cinza é $\frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} = 0,25\ cm^2$. Alternativamente, podemos usar a fórmula para a área de um triângulo, metade da base vezes altura, para obter $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} = 0,25\ cm^2$.



c) Como $AB = CD = 3$ cm e $AD = 5$ cm , vemos que $BC = 1$ cm , e podemos então marcar os comprimentos indicados na figura. A região cinza é a união de um retângulo de base 1 cm e altura 2 cm com um triângulo cuja área já foi calculada no item anterior. Logo a área da região cinza é $1 \times 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$ cm^2.

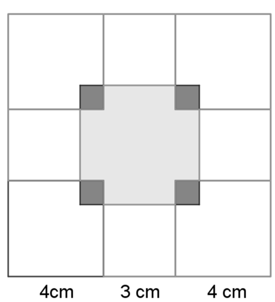


Outra solução possível é a seguinte, a região cinza é um retângulo de base 1 e altura 3 da qual se retiram três triângulos, cada um com área igual a $\frac{1}{4}$ da área de um quadrado de lado 1. A área procurada é então $3\times1-3\times\frac{1}{4}=3-\frac{3}{9}=\frac{9}{4}=2,25$ cm^2.

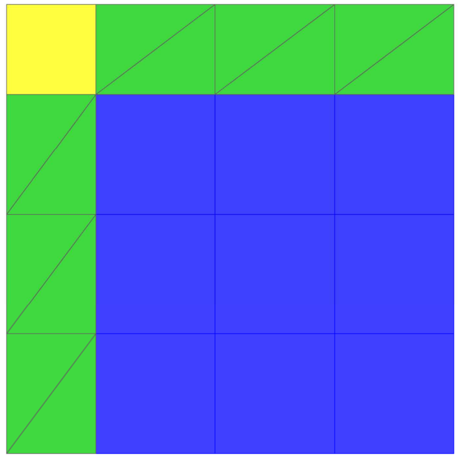
22. Cada uma das peças amarelas tem área $3\times3=9$ cm^2 , as azuis têm $4\times4=16$ cm^2 e as verdes têm $\frac{3\times4}{2}=6$ cm^2.

    a) O hexágono montado por Dafne compõe-se de duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a $2\times6+9+16=37$ cm^2.

    b) A figura construída forma um quadrado de lado $4+3+4=11$ cm, cuja área é $11\times11=121$ cm^2. Ele é composto de 4 amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é $4\times9+4\times16=100$ cm^2. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a $121-100=21$ cm^2 . Alternativamente, podemos pensar no buraco (em cinza claro) como um quadrado de 5 cm de lado do qual foram retirados, nos cantos, quadradinhos de lado 1 cm (em cinza escuro); sua área é então $5\times5-4\times1\times1=21$ cm^2.

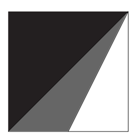


    c) Uma possível maneira de preencher o quadrado 15×15 , como pedido, é mostrado na figura ao lado.



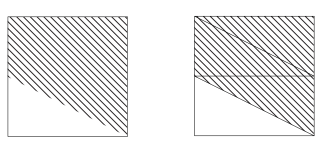
d) Um quadrado de lado 15 cm tem $15 \times 15 = 225\ cm^2$; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul tem área 16 cm^2 e a verde tem área 6 cm^2, ambos números pares. Logo não é possível preencher o quadrado de lado 15 cm apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado 15 cm com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela.

23. a) A parte em preto é formada por quatro triângulos pretos menores, os quais são retângulos isósceles. Um desses triângulos aparece na figura abaixo:



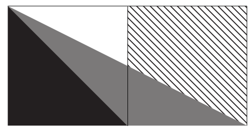
A área de cada um dos triângulos pretos é a metade da área do quadrado do quadriculado, ou seja, é igual à metade de $2 \times 2 = 4\ cm^2$, ou seja, é igual a 2 cm^2. Portanto, a área da parte em preto é igual a $4 \times 2 = 8\ cm^2$.

b) A parte listrada de um quadradinho do quadriculado é um trapézio. Assim, a parte listrada de um quadradinho tem área igual a $\dfrac{3}{4}$ da área do mesmo. De fato, se considerarmos, por exemplo, a divisão na figura ilustrada abaixo



vemos que a área de cada trapézio é $\dfrac{3}{4} \times 4 = 3\ cm^2$ e, portanto, a área total da parte listrada é igual a $4 \times 3 = 12\ cm^2$.

c) Para calcular a área de um pequeno triângulo cinza, podemos destacar da figura o retângulo abaixo, formado por dois quadradinhos do quadriculado.

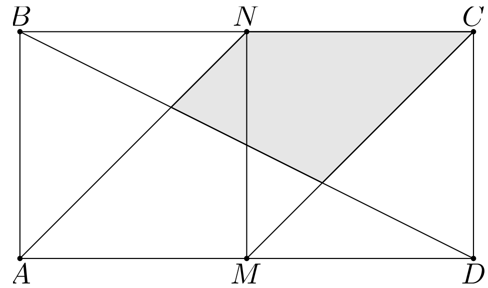


A área desse retângulo é 8 cm^2 . A diagonal o divide em dois triângulos retângulos de mesma área e um deles é formado por um triângulo preto e um triângulo cinza. A área do triângulo cinza será, portanto, igual à diferença entre a metade da área do retângulo e a área do triângulo preto, isto é, $4 - 2 = 2$ cm^2. A área total da parte em cinza é $4 \times 2 = 8$ cm^2. Outra forma de chegar a esse resultado é observar que a metade do quadrado do reticulado (o triângulo preto) é equivalente ao triângulo cinza, ou seja, eles têm a mesma área, pois têm mesmas medidas de base e de altura.

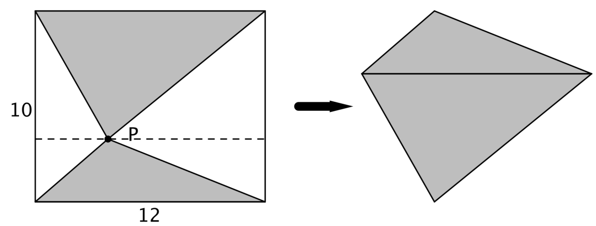
24. Na figura dada a parte cinza obtida depois da primeira dobradura pode ser dividida em duas partes: um quadrado de lado 12 cm e um triângulo de área igual a metade da área do quadrado. A área do quadrado é $12 \times 12 = 144$ cm^2, logo a área do triângulo é $\frac{1}{2} \times 144 = 72$ cm^2. Assim, a área dessa parte cinza é $144 + 72 = 216$ cm^2. Depois da segunda dobradura, obtemos duas partes cinzas iguais, cuja área total é $2 \times 216 = 432$ cm^2.

25. A área de cada quadradinho corresponde a 9% da área do quadrado maior e assim a área dos 4 quadradinhos corresponde a $4 \times 9 = 36\%$ da área do quadrado maior. Logo a área em cinza corresponde, a $100 - 36 = 64\%$ da área total. Como essa área é 128 cm^2, concluimos que 1% dessa área é igual a $\frac{128}{64} = 2$ cm^2. Segue que a área do quadrado maior é $2 \times 100 = 200$ cm^2.

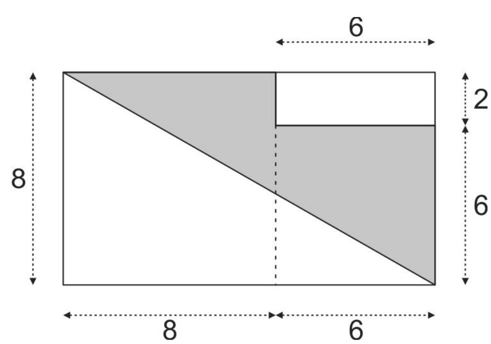
26. Considere o retângulo $ABCD$ e o segmento MN. Como $[ABCD] = 120$ cm^2 então para os retângulos $ABNM$ e $NCDM$ temos que $[ABNM] = [NCDM] = \frac{[ABCD]}{2} =$ 60 cm^2, mais ainda, esses retângulos estão divididos em dois triângulos retângulos, portanto $[ADN] = [CDN] = \frac{60}{2} = 30$ cm^2. Observe agora o paralelogramo $ANCM$, sua área é a área do retângulo $ABCD$ menos a área dos dois triângulos retângulos das pontas, portanto $[ANCM] = [ABCD] - [ADN] - [CDN] = 120 - 30 - 30 = 60$ cm^2. Finalmente, veja que a diagonal BD corta o paralelogramo $ANCM$ em duas figuras de mesma área, portanto a área da região sombreada é $\frac{60}{2} = 30$ cm^2.



27. A área do quadrilátero é a soma das áreas dos triângulos. Traçando por P uma paralela a um dos lados do retângulo, como na figura, este fica dividido em dois retângulos menores. A área de cada um dos triângulos é igual à metade da área do retângulo menor correspondente; como a soma das áreas dos retângulos menores é igual à área do retângulo maior, segue que a soma das áreas dos triângulos é igual à metade da área do retângulo maior, ou seja, é igual a $\frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60\ cm^2$; essa é a área do quadrilátero.



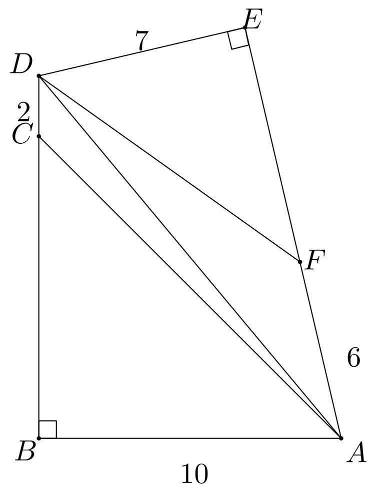
28. Se juntarmos à região cinza o retângulo cujos lados medem 6 cm e 2 cm, como na figura abaixo, teremos um novo retângulo com lados medindo 14 cm e 8 cm cuja área é 112 cm^2.



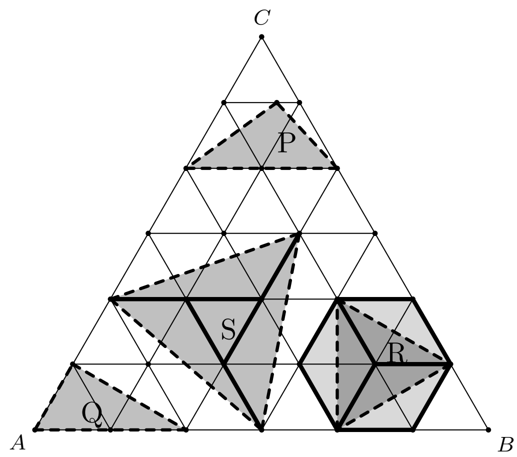
A área da região cinza será igual à diferença entre a área da metade desse último retângulo e a área do retângulo 2×6 que foi acrescentado, isto é, $56 - 12 = 44\ cm^2$.

29. A área do quadrilátero $ACDF$ é a soma das áreas dos triângulos ACD e ADF. O triângulo ACD tem base $CD = 2$ e altura $AB = 10$ relativa à base CD, enquanto o triângulo ADF tem base $FA = 6$ e altura $DE = 7$ relativa à base FA. Logo a área

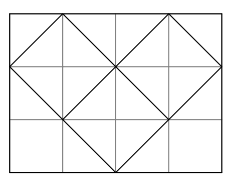
do triângulo ACD é $(2 \times 10) \div 210 = 10$ e a área do triângulo ADF é $(6 \times 7) \div 2 = 21$. Somando essas áreas, obtemos que o quadrilátero $ACDF$ tem área 31.



30. Vamos nomear as quatro regiões triangulares tracejadas pelas letras P, Q, R e S, conforme indicado na figura. Observe que P e Q possuem a mesma área, já que as duas regiões são triângulos com as mesmas medidas de base e altura. A área dessas regiões medem $\frac{1}{2} \times 4 = 2$, pois Q é a metade de um paralelogramo formado por quatro triângulos menores. Por outro lado, a região R é a parte central de um hexágono formado por seis triângulos menores, que por sua vez pode ser compreendido como a metade interna de três regiões com borda em negrito. Logo a região R possui área $\frac{1}{2} \times 6 = 3$. Por último, perceba que a região S pode ser dividida em quatro regiões, um triângulo menor no centro, e três triângulos iguais em seu entorno, como indicado em negrito na figura. O triângulo central tem área 1 e os outros tem área 2, pois são metade de um paralelogramo formado por quatro triângulos menores. Assim, a área da região S é $1 + 3 \times 2 = 7$. Consequentemente, a área total destacada é igual a $2 \times 2 + 3 + 7 = 14$.



31. Divida o retângulo em quadrados menores de acordo com a figura a seguir. Note que cada quadrado inicial é formado por quatro triângulos menores. Logo, cada triângulo desse tem área igual a $\frac{1}{4}$. Como o retângulo é formado por 24 destes triângulos, sua área será igual a $\frac{24}{4} = 6$.



32. Sejam $x = AB$ e $y = BC$ as medidas dos lados desconhecidos. Assim, a área do retângulo $ABCD$ é $x \cdot y = 11$. Por outro lado, $BC' = 2y$ e $BB' = x$. Assim, $[BB'C'] = \frac{2y \cdot x}{2} = xy = 11$. Utilizando o mesmo raciocínio,

$$[A'AB'] = [A'DD'] = [D'CC'] = 11.$$

Portanto, $[A'B'C'D'] = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 55$.

33. Seja x a medida da área de cada triângulo cinza. Assim, $[LKJI] = 4x + 9$ e $[NMOP] = 81 - 4x$. Por outro lado, $LKJI$ e $NMOP$ são dois quadrados iguais, pois têm o mesmo lado (que é igual ao maior lado do quadrado). Assim,

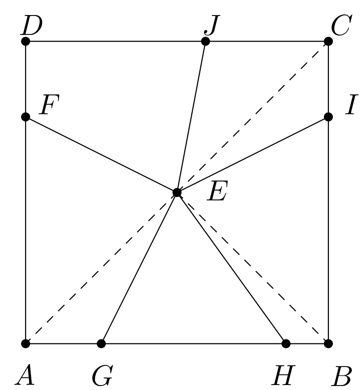
$$4x + 9 = 81 - 4x$$

$$8x = 72$$

$$x = 9.$$

Portanto, $[LKJI] = [NMOP] = 45$.

34. Sabemos que $AF = 13$. Veja que as distâncias do ponto E até os lados do quadrado são iguais a 10. Estas distâncias funcionam como alturas dos triângulos que têm vértice em E e lados sobre os lados do quadrado $ABCD$. Além disso, cada pedaço de papel terá área igual a $\frac{20 \cdot 20}{5} = 80$. Note que o triângulo AEF tem área igual a $\frac{13 \cdot 10}{2} = 65$. Portanto, ainda falta 15 para completarmos o pedaço de 20 de área. Escolha um ponto G sobre AB de modo que $AG = 3$. Assim, $[FEGA] = 80$. Para descobrirmos o próximo corte, podemos escolher H sobre AB de modo que $GH = 16$. Neste caso, $[EGH] = 80$. Continuando com o mesmo raciocínio, devemos escolher pontos I sobre BC e J sobre DC de modo que $IB = 15$ e $JC = 9$. Assim, dividimos o quadrado em cinco parte de mesma área conforme a figura a seguir.



35. Como $AE = CF$, os trapézios $DCFE$ e $AEBF$ são iguais. Portanto,

$$S_5 + S_4 + S_6 = S_1 + S_2 + S_3.$$

Por outro lado, o paralelogramo $ABCD$ e o triângulo PCD têm a mesma base (DC) e a mesma altura. Portanto, a área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo PDC. Portanto, temos que

$$S_1 + S_5 = S_2 + S_6 + S_3 + S_4.$$

Somando S_1 do dois lados da primeira equação, temos que

$$(S_1 + S_5) + S_4 + S_6 = S_1 + S_1 + S_2 + S_3.$$

Daí,

$$(S_2 + S_6 + S_3 + S_4) + S_4 + S_6 = S_1 + S_1 + S_2 + S_3.$$

$$\Rightarrow 2(S_4 + S_6) = 2S_1.$$

E com isso, demonstramos o item (b). Para demonstrar o item (a) basta somar S_5 dos dois lados da primeira equação e proceder de maneira semelhante.

36. Note que o paralelogramo $ABCD$ e o triângulo GDC têm a mesma base (DC) e a mesma altura. Logo, $[ABCD] = 2[DCG]$. Por outro lado, o paralelogramo $DGFE$ e o triângulo GDC têm a mesma base (DG) e a mesma altura. Logo, $[GFED] = 2[DGC]$. Como as áreas do dois paralelogramos sãi iguais ao dobro da área do mesmo triângulo, elas devem ser iguais.

37. O segmento AD divide o triângulo ABC em duas partes de mesma área, pois D é o ponto médio. Assim, $[ABD] = 36$. Da mesma forma, BE divide o triângulo ABD em duas partes de mesma área. Logo, $[BED] = 18$. Aplicando esse raciocínio mais uma vez, encontramos que $[EFD] = 9$.

38. Seja P o ponto de encontro entre os segmentos EG e HF. Note que PE divide o triângulo PAB em duas partes de mesma área. Seja $[PEA] = [PEB] = x$. Utilizando a mesma ideia, sejam $[PBF] = [PFC] = y$, $[PCG] = [PGD] = z$ e $[PDH] = [PHA] = w$. Pelo enunciado, sabemos que $x + w = 210$, $y + x = 200$ e $w + z = 240$ e queremos descobrir o valor de $y + z$. Somando a duas últimas equações, temos que $x + y + z + w = 200 + 240 = 440$. Por outro lado, $x + w = 210$. Logo, $y + z = 440 - 210 = 230$.

39. Seja S a área do triângulo DFA. Como os triângulos DAB e EAB têm a mesma área, pois têm a mesma base (AB) e a mesma altura (AD), podemos garantir que $[EFB] = S$. Por outro lado, $[ABD]$ é metade da área do retângulo $ABCD$. Assim, $[DBC] = S + 27$. Consequentemente, $[ECB] = 15$. Sendo, $CB = 5$ e $EC = x$, a área do triângulo ECB também é igual a $\frac{5x}{2}$. Portanto, $x = 6$ e então $CD = 18$. Por fim, a $[ABCD] = 18 \cdot 5 = 90$.

40. Veja que $[AMB] = \frac{1}{2}[ABC]$ e $[MDC] = \frac{1}{2}[DBC]$. Dessa forma,

$$[MAD] = [ABCD] - \frac{1}{2}([ABC] + [DBC])$$

De maneira análoga,

$$[NBC] = [ABCD] - \frac{1}{2}([BAD] + [CAD])$$

Somando estas duas últimas equações, temos que

$$[MAD + [NBC] = 2[ABCD] - \frac{1}{2}([ABC] + [DBC] + [BAD] + [CAD]).$$

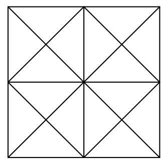
Por outro lado, $[ABC] + [CAD] = [BAD] + [DBC] = [ABCD]$. Portanto,

$$[MAD + [NBC] = 2[ABCD] - \frac{1}{2}(2[ABCD]) = [ABCD].$$

41. Note que cada triângulo cinza possui dois lados que são iguais a dois lados do triângulo branco. Isso ocorre devido aos quadrados terem lados iguais aos lados do triângulo branco. Assim, ao fazermos os encaixes da segunda figura, podemos perceber que

cada triângulo branco terá a mesma área do triângulo cinza, pois terão todos a mesma medida de altura e mesma medida de base. Portanto, a área da segunda figura será igual a quatro vezes a área do triângulo cinza que é $4 \cdot 10 = 40$.

42. Desenhando os lados AB, BC, CD e DA na figura do catavento, obtemos um desenho como o mostrado a seguir:



Assim, é possível visualizar que cada triângulo cinza corresponde a $\frac{1}{16}$ da área do quadrado e que cada triângulo branco corresponde a $\frac{1}{8}$ da área do mesmo quadrado. Portanto, como temos o mesmo número de triângulos cinzas e brancos na figura do catavento, a razão entre as áreas será $\frac{1}{2}$. Para o item (b), veja que cada triângulo cinza cobre uma parte de um triângulo branco, deixando a vista um trapézio branco. Como a área do triângulo cinza é metade da área do triângulo branco, a área do trapézio será igual à área do triângulo cinza. Sendo a área do quadrado $ABCD$ igual a 400, cada triângulo cinza terá área igual a 25 e cada triângulo branco terá área igual a 50. Portanto, a área branca da segunda figura será igual a $4 \cdot 50 + 4 \cdot 25 = 300$.

43. Seja x a medida do lado do quadrado maior. Sabemos que

$$[ACF] = [ABGF] + [ABC] - [FCG] = [GBEF] - [FEA] + [ABC] - [FCG]$$

$$\Rightarrow [ACF] = x^2 - \frac{(x-10)x}{2} + \frac{10 \cdot 10}{2} - \frac{(10+x)x}{2} = 50.$$