Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Teoria dos Números - Nível 2

Prof. Samuel Feitosa

Aula 13

Equações Diofantinas III

Já estudamos as equações diofantinas lineares e equações em que alguma fatoração conveniente poderia facilitar a busca por soluções. Nesta aula, estaremos interessados em encontrar módulos convenientes para analisar os termos de uma equação.

Exemplo 1. *Encontre todas as soluções em inteiros da equação* $x^2 - 7y = 1004$.

Analisando os restos na divisão por 7, obtemos $x^2 \equiv 3 \pmod 7$. Entretando, os únicos inteiros que são restos de quadrados perfeitos na divisão por 7 são $0, 1, 2$ e 4. Como $3 \equiv 1004 \pmod 7$ não faz parte dessa lista, não existem soulçoes inteiras para a equação.

Exemplo 2. *Encontre todas as soluções em inteiros da equação* $x^3 + 98y^2 + 5 = 0$.

Analisemos os possíveis restos de $x^3 \pmod 7$ fazendo uma tabela dos restos correspondentes de x e x^3:

x	0	1	2	3	4	5	6
x^3	0	1	1	6	1	6	6

Como os únicos restos possíveis são $0, 1, -1 \pmod 7$, o lado esquerdo da equação só pode deixar resto $5, 6, 4 \pmod 7$. Como o resto do lado direito não faz parte dessa lista, não existem soluções em inteiros.

Exemplo 3. *Prove que a equação* $x^2 = 3y^2 + 8$ *não possui soluções em inteiros* x *e* y.

Analisando o resto na divisão por 3, obtemos $x^2 \equiv 2 \pmod 3$. Como os únicos restos de um quadrado por 3 são 0 e 1, não existem soluções em inteiros.

Nos próximo problema, usaremos congruências para encontrarmos informações sobre as incógnitas envolvidas nos expoentes e buscaremos alguma fatoração apropriada para reduzir o problema à resolução de um sistema de equações.

Exemplo 4. *Encontre todas as soluções em inteiros positivos da equação* $3^m + 7 = 2^n$

Analisando o resto módulo 3 do lado esquerdo, podemos concluir que $2^n \equiv 1 \pmod 3$. Como $2^n \equiv (-1)^n \pmod 3$, concluímos que n é par, ou seja, $n = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim, como o lado direito é múltiplo de 4, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} 3^m &\equiv -7 \pmod 4 \\ (-1)^m &\equiv 1 \pmod 4 \end{aligned}$$

Logo, m é par, ou seja, $m = 2t$, para algum $t \in \mathbb{N}$. Usando diferença de quadrados, podemos escrever:

$$7 = (2^k - 3^t)(2^k + 3^t).$$

Como 7 é primo, temos as seguintes opções:

$$\begin{aligned} 7 = 2^k + 3^t &\Rightarrow 2^k - 3^t = 1 \\ 1 = 2^k + 3^t &\Rightarrow 2^k - 3^t = 7 \end{aligned}$$

Em ambos os casos, $8 = 2^{k+1}$ e daí $k = 2$. Substituindo nas equações, obtemos solução apenas no primeiro caso com $t = 1$. Assim, $(m, n) = (2, 4)$.

Exemplo 5. *Encontre todas as soluções em inteiros positivos da equação* $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Analisandoa equação módulo 3, $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ e assim, $n \equiv \pm 1 \pmod 3$. No primeiro caso, se $n = 3k + 2$, temos $3 \cdot 2^m + 1 = n^2 = 9k^2 + 12k + 4$ e daí $2^m = (3k + 1)(k + 1)$. Como o lado esquerdo possui apenas um fatores 2, temos $3k + 1 = 2^i$, $k + 1 = 2^j$,com $j \leq i$. Daí, $3 \cdot 2^j - 2^i = 2$. Se $j = i$, temos $2^{i+1} = 2$ e consequentemente $i = 0$ produzindo $k = 0$ e $(m, n) = (0, 2)$. Se $j < i$, temos $j = 1$ pois o lado esquerdo possui um único fator 2 e por conseguinte, $i = 2$, $(m, n) = (3, 5)$. No segundo caso, quando $n = 3k + 1$, é tratado analogamente produzindo apenas a nova solução $(m, n) = (4, 7)$.

Exemplo 6. *Encontre todas as soluções da equação* $x^2 - xy + y = 3$ *em inteiros* x, y.

Fixado o valor de y, podemos encontrar os valores de x usando a fórmula de Báskara. Como x é inteiro, o discriminante $y^2 - 4(y - 3) = (y - 2)^2 + 8$ deve ser um quadrado perfeito, digamos z^2. Assim,

$$z^2 - (y - 2)^2 = (z - y + 2)(z + y - 2) = 8.$$

Como $z - y + 2$ e $z + y - 2$ possuem a mesma paridade, o produto anterior dever $(\pm 2) \cdot (\pm 4)$. Em qualquer caso, somando ambos os termos, obtemos $2z = \pm 6$ e $z = \pm 3$. Logo, $y - 2 = \pm 1$. Substituindo os valores de y na equação original, obtemos os valores correspondentes para x. As soluções são: $(x, y) = (2, 1), (-1, 1), (0, 3), (3, 3)$.

Exemplo 7. *(Hungria 1969) Seja n um inteiro positivo. Prove que se* $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ *é um inteiro, então é um quadrado perfeito.*

Necessariamente $\sqrt{28n^2+1}$ deve ser racional e para isso $28n^2+1$ deve ser um quadrado perfeito. Assim,

$$\begin{aligned} 28n^2+1 &= t^2 \\ 7n^2 &= \left(\frac{t-1}{2}\right)\left(\frac{t+1}{2}\right) \end{aligned}$$

Como 7 é primo, $7 \mid \dfrac{t+1}{2}$ ou que $7 \mid \dfrac{t-1}{2}$. No primeiro caso,

$$n^2+1 = \left(\frac{t+1}{14}\right)\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

Além disso, como $mdc((t-1)/2,(t+1)/2)=1$, existem a e b tais que

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{t+1}{14} \\ b^2 &= \frac{t-1}{2} \end{aligned}$$

Daí, $7a^2-b^2=1$ e $b^2 \equiv -1 \pmod 7$. Como quadrados perfeitos só podem deixar restos $0,1,2,4 \pmod 7$, esse caso não gera soluções. No segundo caso,

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{t+1}{2} \\ b^2 &= \frac{t-1}{14}. \end{aligned}$$

Logo, $2+2\sqrt{28n^2+1} = 2+2t = 2+2(2a^2-1) = (2a)^2$.

Exemplo 8. *(Reino Unido 1996) Encontre todas as soluções em inteiros não negativos x,y,z da equação:*

$$2^x+3^y=z^2.$$

Se $y=0$, então $2^x = z^2-1 = (z-1)(z+1)$. Analisando a fatoração em primos, existem i,j, com $i>j$, tais que $z+1=2^i$ e $z-1=2^j$. A diferença das duas equações produz $2=2^i-2^j=2^j(2^{i-j}-1)$. Como o lado esquerdo possui apenas um fator 2, $j=1$ e $i-j=1$. Nossa primeira solução encontrada é $(x,y,z)=(3,0,3)$. Se $y>0$, $2^x \equiv z^2 \pmod 3$. Como $2^x \equiv \pm 1 \pmod 3$ e $z^2 \equiv 0,1 \pmod 3$ temos, $2^x \equiv z^2 \equiv 1$. Isso implica que x é par, ou seja, $x=2m$. Fatorando, obtemos:

$$\begin{aligned} 3^y &= z^2-2^{2m} \\ &= (z-2^m)(z+2^m) \end{aligned}$$

Novamente, analisando a fatoração em primos, existem l e k, com $l<k$, tais que $z-2^m = 3^l, z+2^m=3^k$. A diferença das duas equações produz $2^{m+1}=3^l(3^{k-l}-1)$. Novamente

analisando a fatoração em primos, $l = 0$ e $2^{m+1} = 3^k - 1$. Se $m = 0$, temos $k = 1$ e $(x, y, z) = (0, 1, 2)$. Se $m > 0$,

$$\begin{aligned} 3^k &= 1 \pmod 4 \\ (-1)^k &= 1 \pmod 4. \end{aligned}$$

e devemos ter k par, ou seja, existe t tal que $k = 2t$. Fatorando novamente, $2^{m+1} = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Escrevendo $3^k + 1 = 2^p$ e $3^k - 1 = 2^q$, temos $2 = 2^q(2^{p-q} - 1)$. Veja que já tratamos essa equação no início e assim podemos concluir que $q = 1$ e $p - q = 1$. Produzindo a solução $(x, y, z) = (4, 2, 5)$.

Nos próximos dois problemas, contruiremos soluções indutivamente.

Exemplo 9. *(Bulgária) Prove que para qualquer número natural $n \geq 3$, existem números naturais ímpares x_n e y_n tais que $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$.*

Para $n = 3$, basta tomar $x_1 = y_1 = 1$. Suponha que tenhamos encontrado x_k e y_k ímpares, satisfazendo

$$7x_k^2 + y_k^2 = 2^k.$$

Um dos números $(x_k + y_k)/2, (x_k - y_k)/2$ é ímpar e assim podemos escolher um deles de modo a satisfazer o enunciado para $k + 1$:

$$7\left(\frac{x_k \pm y_k}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_k \mp y_k}{2}\right)^2 = 2(7x_k^2 + y_k^2) = 2^{k+1}.$$

Exemplo 10. *Mostre que existe uma sequência infinita de inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots$ tais que $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ é um quadrado perfeito para todo n natural.*

Definamos $a_1 = 3$. Suponha que a sequência já esteja definida para $a_1, a_2, \ldots, a_k$ com

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 = (2t + 1)^2.$$

Vejamos que podemos definir o próximo termo de modo que a soma de todos os primeiros $k + 1$ termos ao quadrado ainda seja um quadrado perfeito de um inteiro ímpar. Basta fazer $a_{k+1} = 2t^2 + 2t$. Veja que:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2 &= (2t + 1)^2 + (2t^2 + 2t)^2 \\ &= (2t^2 + 2t + 1)^2. \end{aligned}$$

que é novamente o quadrado de um ímpar.

Problemas Propostos

Problema 11. *Encontre todas as soluções em inteiros x, y, z, t da equação:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1.$$

Problema 12. *Encontre todas as soluções em inteiros positivos da equação*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

Problema 13. *Encontre todas as soluções em inteiros de* x^2-y^2-1988

Problema 14. *Mostre que para todo inteiro* z*, existem inteiros* x *e* y *satisfazendo* $x^2-y^2=z^3$

Problema 15. *Encontre todas as soluções de* $1+x+x^2+x^3=2^y$ *em inteiros positivos* x *e* y*.*

Problema 16. *Mostre que a equação diofantina* $5m^2-6mn+7n^2=1988$*, não possui solução nos inteiros.*

Problema 17. *(Rússia 1996) Sejam* x,y,p,n,k *números naturais tais que*

$$x^n-y^n=p^k.$$

Prove que se $n>1$ *é ímpar, e* p *é um primo ímpar, então* n *é uma potência de* p*.*

Problema 18. *(Rússia 1997) Encontre todas as soluções inteiras da equação*

$$(x^2-y^2)^2=1+16y.$$

Problema 19. *(OBM 2009) Prove que não existem inteiros positivos* x *e* y *tais que* $x^3+y^3=2^{2009}$*.*

Apêndice: A conjectura de Catalan

Em alguns dos problemas anteriores, nos deparamos com a questão de encontrarmos duas potências perfeitas consecutivas não triviais. As únicas soluções que apareceram foram $2^3=8$ e $3^2=9$. Em 1844, Eugène Catalan conjecturou que essa seria a única solução. Recentemente, tal conjectura se mostrou verdadeira atráves do:

Teorema 20. *(Mihalnescu - 2002)Existe uma única solução nos números naturais de*

$$x^a-y^b=1,$$

com $x,a,y,b>1$ *que é* $(x,y,a,b)=(3,2,2,3)$*.*

Problema 21. *Encontre toda as soluções em inteiros positivos da seguinte equação diofantina:*

$$2y^2=x^4+x.$$