POLOS OLÍMPICOS DE
TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

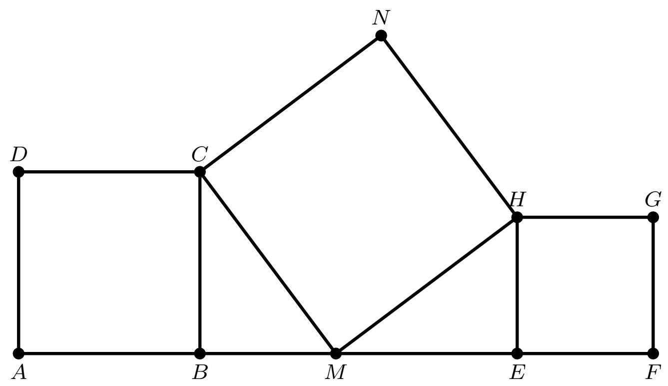
Nível 2

Teorema de Pitágoras

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

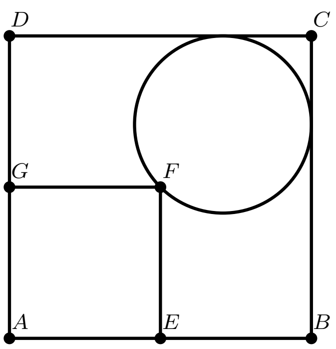
Problema 1. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de área 64 cm^2 e $EFGH$ um quadrado de área 36 cm^2. Determine a área do quadrado $CMHN$.



Problema 2. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 28. Seja P um ponto no seu interior e E um ponto no lado CD de modo que $CD \perp PE$ e $AP = BP = PE$. Ache AP.

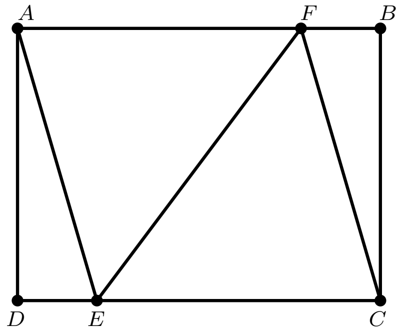
Problema 3. Suponha que ABC seja um triângulo retângulo escaleno, e P seja o ponto na hipotenusa AC tal que $\angle ABP = 45°$. Dado que $AP = 1$ e $CP = 2$, calcule a área do triângulo ABC.

Problema 4. (Cone Sul 1989 - adaptado) Na figura abaixo temos dois quadrados. O quadrado $ABCD$, que tem lado 2; e o quadrado $AEFG$, que tem lado 1. Determine o raio do círculo que é tangente aos lados BC e CD do quadrado $ABCD$ e passa pelo vértice F do quadrado $AEFG$.



Problema 5. P é um ponto no interior do retângulo $ABCD$. Se $PA = 2$; $PB = 3$, e $PC = 10$. Ache PD.

Problema 6. Nos lados AB e DC do retângulo $ABCD$, os pontos F e E são escolhidos de modo que $AFCE$ seja um losango. Se $AB = 16$ e $BC = 12$, ache EF.



Soluções

1. Note que

$$\angle BMC = 180^\circ - \angle CME = 180^\circ - 90^\circ - \angle HME = 90^\circ - \angle HME = \angle EHM.$$

Analogamente, $\angle BCM = \angle EMH$. Como $CM = MH$ (são lados de um quadrado), temos que, pelo critério a.l.a., $\triangle CBM \equiv \triangle EMH$. Consequentemente, $BM = EH = 6$.

Vamos aplicar o teorema de Pitágoras no $\triangle CBM$:

$$CM^2 = BC^2 + BM^2 = 8^2 + 6^2 = 100.$$

A área do quadrado $CMHN$ é igual a

$$CM \cdot MH = CM^2 = 100.$$

2. Chamemos AP de x. Seja F o ponto de interseção de EP e AB. Como $FE \perp CD$, temos também $FE \perp AB$. Note que o $\triangle ABP$ é isósceles (com $AP = PB$) e, como PF é altura, será também mediana. Ou seja, F é ponto médio de AB.

Note que $ADEF$ é um retângulo, logo $ED = AD = 28$. Vejamos os lados do $\triangle ADP$: $AF = 14$, $AP = x$ e $PF = 28 - x$. Aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos

$$x^2 = 14^2 + (28 - x)^2 = 14^2 + 28^2 - 56x + x^2.$$

Logo

$$x = \frac{14^2 + 28^2}{56} = 17,5.$$

3. Note que BP é bissetriz do $\angle ABC$. Pelo teorema da bissetriz, temos

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC} = \frac{1}{2},$$

logo $BC = 2 \cdot AB$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$3^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + (2 \cdot AB)^2 = 5 \cdot AB^2,$$

o que implica que $AB^2 = \frac{9}{5}$.

A área do $\triangle ABC$ é igual a

$$\frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot 2AB}{2} = AB^2 = \frac{9}{5}.$$

4. Chamemos de O o centro do círculo tangente aos lados BC e CD e que passa pelo ponto F. Seja H o pé da perpendicular traçada desde O até o lado BC e seja $I \neq F$ ponto de interseção do círculo com a diagonal AC.

Usando o teorema de Pitágoras no $\triangle AEF$, temos que $AF^2 = AE^2 + EF^2 = 2$ e, portanto, $AF = \sqrt{2}$.

Agora chamemos de r o raio do círculo e de x o comprimento do segmento IC. Note que $OF = OH = OI = r$.

Note que

$$\sqrt{2} = FC = 2r + x.$$

Usando o teorema de Pitágoras no $\triangle OHC$, temos

$$2r^2 = OH^2 + HC^2 = OC^2 = (r + x)^2 = r^2 + 2rx + x^2.$$

O que implica que

$$r^2 = 2rx + x^2.$$

Substituindo $x = \sqrt{2} - 2r$, temos

$$r^2 + 2\sqrt{2}r - 2 = 0,$$

cuja única raiz positiva é $r = 2 - \sqrt{2}$.

5. A reta que passa por P e é perpendicular aos lados AB e CD intersecta ditos segmentos nos pontos E e F, respectivamente.

Usando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos PBE e PAE, temos

$$BE^2 + EP^2 = 3^2 \quad \text{e} \quad AE^2 + EP^2 = 2^2.$$

Subtraindo as equações acima, obtemos

$$BE^2 - AE^2 = 5.$$

Da mesma forma, usaremos o teorema de Pitágoras agora nos triângulos retângulos PCF e PDF, obtendo

$$CF^2 + FP^2 = 10^2 \quad \text{e} \quad DF^2 + FP^2 = PD^2.$$

Subtraindo as equações acima obtemos

$$CF^2 - DF^2 = 100 - PD^2.$$

Como $AEFD$ e $BEFC$ são retângulos, temos que $AE = DF$ e $BE = CF$. Logo $BE^2 - AE^2 = CF^2 - DF^2$, o que implica que

$$100 - PD^2 = 5,$$

e, portanto,

$$PD = \sqrt{95}.$$

6. Chamemos de x o comprimento do lado do losango $AFCE$. No triângulo retângulo BCF temos $BC = 12$, $BF = AB - AF = 16 - x$ e $CF = x$, logo, pelo teorema de Pitágoras, temos

$$(16 - x)^2 + 12^2 = x^2,$$

donde concluímos

$$x = 12,5.$$

Também temos $FB = DE = 16 - x = 3,5$. Denotemos por G o pé da perpendicular traçada desde E até o lado AB. Como $ADEG$ é um retângulo, temos $AG = DE = 3,5$ e $EG = ED = 12$.

Agora, no triângulo retângulo EFG conhecemos o comprimento dos catetos $EG = 12$ e $FG = AF - AG = 12,5 - 3,5 = 9$. Usando o teorema de Pitágoras, encontramos

$$EF = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández