Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2 **Aula Complementar I**

Prof. Hugo Araújo

Funções quadráticas - Parte 2

Dando continuidade a esta aula, iremos agora considerar funções dadas pela fórmula

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde $a \neq 0$, b e c são números reais. Na primeira parte, estudamos as soluções da equação $f(x) = 0$ para a função f escrita acima. Nesta parte, estaremos mais interessado no estudo dos possíveis valores de $f(x)$ e como estes dependem de x.

2) Função do segundo grau

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita quadrática ou do segundo grau quando existem números reais $a \neq 0$, b e c tais que

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. O termo a costuma ser chamado de coeficiente líder. Assim como para equações, dizemos que $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da função.

Começamos escrevendo a função em uma forma mais útil, também conhecida como *forma canônica*. Seguindo as manipulações feitas na demonstração da fórmula de Bhaskara na primeira parte desta aula, encontramos a seguinte relação

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Podemos então notar que esta função se comporta de maneira semelhante a x^2 quando $a > 0$ e semelhante a $-x^2$ quando $a < 0$: seu gráfico é como o gráfico destas funções, a menos de uma translação por $(+b/2a)$ no eixo x e $-\Delta/4a^2$ no eixo y, seguida de uma dilatação por $|a|$ na direção y. Mais abaixo iremos analisar como as diferentes possibilidades para estes valores influenciam o gráfico de f.

Antes disso, algumas consequências da forma canônica acima. Note que o termo entre parênteses é o quadrado de um número real e portanto é maior ou igual a 0. Consequentemente, quando $a > 0$, o menor valor de $f(x)$ é atingindo quando este quadrado é igual a 0.

Ou seja, o *mínimo* de f é atingido quando $x = -b/2a$ e este *mínimo* é igual a $-\Delta/4a$. Analogamente, para $a < 0$, a função tem um *máximo* que é atingido também quando $x = -b/2a$ e este *máximo* é igual a $-\Delta/4a$. O ponto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

é chamado de vértice da parábola que representa o gráfico de f.

Nossa análise a respeito do gráfico será dividida em casos, dependendo do sinal de a e Δ.

Caso 1.1) $a > 0$ **e** $\Delta < 0$**:**

Pela forma canônica, segue que

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue que $f(x)$ é positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

Caso 1.2) $a > 0$ **e** $\Delta = 0$**:**

Procedendo da mesma forma acima, obtemos $a \cdot f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com igualdade apenas quando $x = -b/2a$, ou seja, no vértice da parábola.

Caso 1.3) $a > 0$ **e** $\Delta > 0$**:**

Neste caso, pela aula anterior, sabemos que a equação $f(x) = 0$ tem duas raízes reais distintas x_1 e x_2. Além disso, vimos que

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Assumindo sem perda de generalidade que $x_1 < x_2$ e analisando o sinal de cada um dos parênteses do lado direito obtemos:

- $f(x) > 0$ se $x < x_1$ ou $x > x_2$;
- $f(x) < 0$ se $x_1 < x < x_2$.

Os outros casos são análogos, basta trocar o sinal de f na conclusão.

Caso 2.1) $a < 0$ **e** $\Delta < 0$**:**

Temos $f(x)$ negativo para todo $x \in \mathbb{R}$.

Caso 2.2) $a < 0$ **e** $\Delta = 0$**:**

Temos $f(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com igualdade apenas para $x = -b/2a$.

Caso 2.3) $a < 0$ **e** $\Delta > 0$**:**

Se $x_1 < x_2$ são as raízes de $f(x) = 0$,

- $f(x) < 0$ se $x < x_1$ ou $x > x_2$;
- $f(x) > 0$ se $x_1 < x < x_2$.

Finalmente, note que $f(x) = f(y)$ se e somente se

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left(y + \frac{b}{2a} \right)^2 \iff x = y \quad \text{ou} \quad x + y = -\frac{b}{a}.$$

Segue também desta observação que o gráfico de f é simétrico em relação à reta $(-b/2a, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Mais ainda, supondo que $a > 0$, a partir da fórmula canônica segue que f é crescente no intervalo $[-b/2a, \infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, -b/2a]$. As ilustrações na próxima página exemplificam cada um dos casos acima.

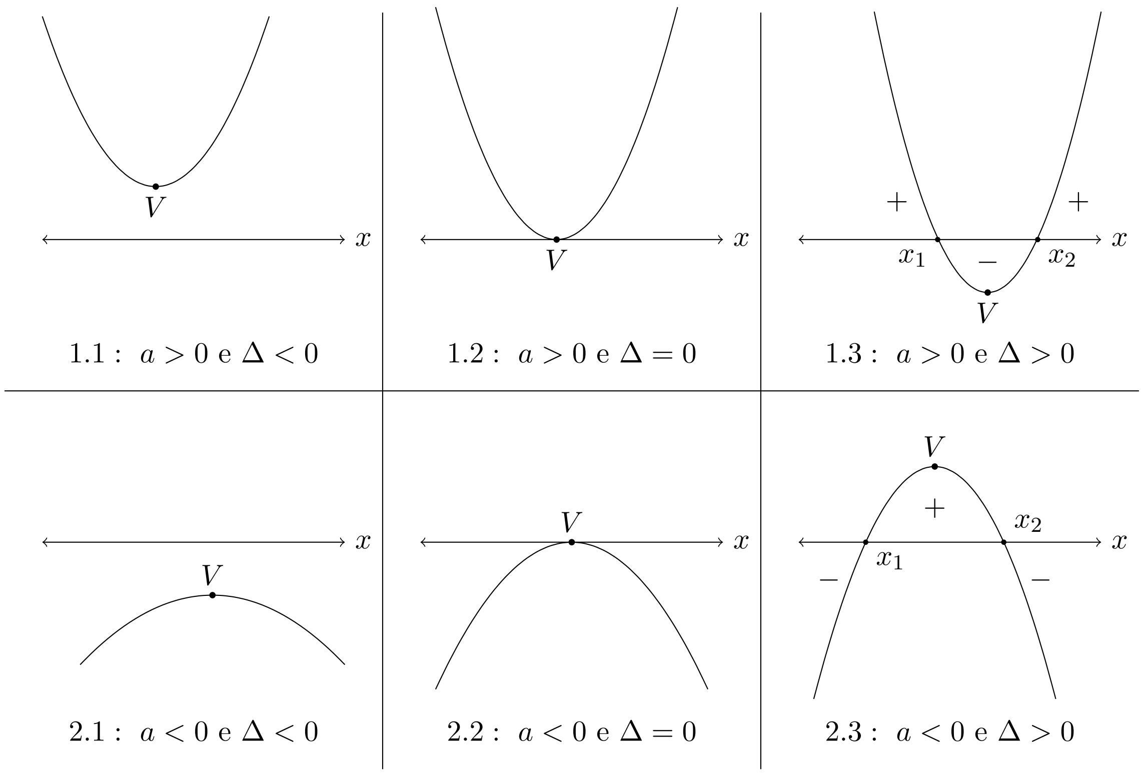


Figura 1: Os possíveis gráficos de uma função quadrática. Note que o módulo do valor de a é maior no exemplo 1.3 e menor no exemplo 2.1. Supondo que o eixo y está no centro de cada figura, o exemplo 1.1 indica um valor de b menor que 0, já o exemplo 2.3 um valor de b maior que zero.

Começamos com um exemplo simples porém importante, relacionado ao cálculo do máximo de uma função quadrática.

Exemplo 1. Fixe um número inteiro positivo n. Sejam x e y dois números inteiros tais que $x + y = n$. Qual é o maior valor possível para o produto xy? Quando ele é atingido?

Solução. Podemos escrever $y = n - x$, donde segue que $xy = x(n - x) = -x^2 + nx$. Como -1 é negativo, a função $f(x) = -x^2 + nx$ atinge um máximo para $x = n/2$. Logo se n é par, o máximo é atingido quando $x = y = n/2$ e ele é igual a $n^2/4$.

Se n é ímpar, $n/2$ não é inteiro, contudo uma análise do gráfico indica que xy atinge seus maiores valores para escolhas de x próximas de $n/2$. Esta intuição pode ser confirmada ao analisarmos a forma canônica

$$f(x) = -\left[\left(x - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4}\right].$$

Esta expressão atinge seu valor máximo para valores de x que tornam o quadrado entre parênteses mínimo. Dentre os inteiros, isto acontece para os dois valores de x mais próximos de $n/2$. Se escrevermos $n = 2n' + 1$, estes valores são n' e $n' + 1$. Em ambos os casos a expressão é igual a $\frac{n^2-1}{4}$. ■

Pelo exemplo acima, podemos concluir que o produto xy toma valores maiores quando escolhemos x e y próximos de sua média $n/2 = (x + y)/2$. Por outro lado, toma valores cada vez menores (inclusive valores negativos) quando escolhemos estes números de forma que eles fiquem cada vez mais distantes de sua média. Este tipo de simetria pode ser muito útil no estudo de funções quadráticas, como veremos no exemplo abaixo.

Exemplo 2. (OBM 2014) Sejam p e q inteiros. Sabendo que $x^2 + px + q$ é positivo para todo x inteiro, prove que a equação $x^2 + px + q = 0$ não possui solução real.

Solução. Suponha que existam raízes reais, ou seja, que $\Delta \geq 0$. Note que nenhuma delas pode ser inteira, porque isso contradiz a hipótese de $x^2 + px + q$ ser positivo para todo x inteiro.

Se $\Delta = 0$, então $p^2 = 4q$, donde segue que p é par e as duas raízes são iguais a $p/2$, que é inteiro. Logo este caso não pode acontecer.

Por outro lado, se $\Delta > 0$, as duas raízes $x_1 < x_2$ da equação tem que estar entre dois inteiros consecutivos z e $z + 1$, pois caso contrário existiria algum inteiro r tal que $x_1 < r < x_2$ e pela análise que fizemos anteriormente $f(r)$ teria que ser negativo, contrariando a hipótese do enunciado.

Como $x_1 + x_2 = -p$, segue que $2z < -p < 2z + 2$, e como p é um inteiro, concluímos que $-p = 2z + 1$. Logo existe $r \in (0, 1/2)$ tal que

$$x_1 = z + \frac{1}{2} - r \quad \text{e} \quad x_2 = z + \frac{1}{2} + r.$$

Por outro lado $x_1x_2 = q$, o que implica

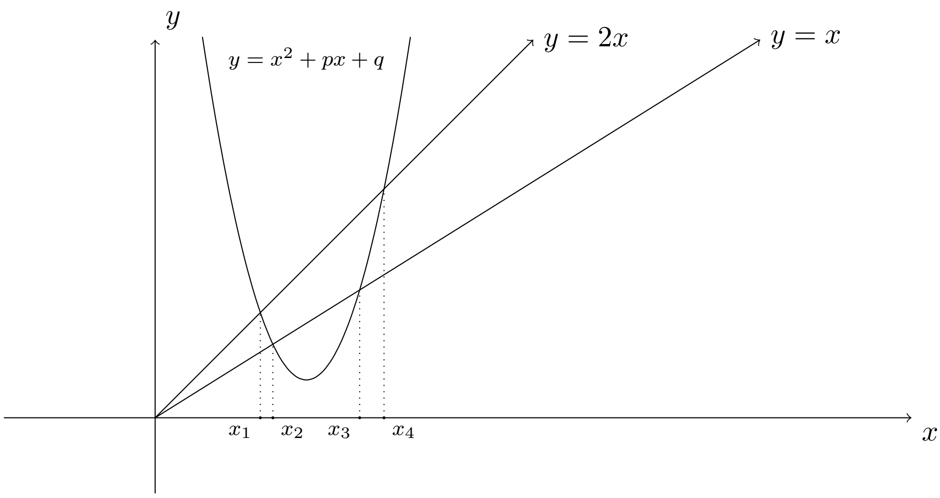
$$z^2 + z + \frac{1}{4} - r^2 = q \in \mathbb{Z}.$$

Como z é inteiro, r^2 tem que ser maior ou igual a $1/4$. Isto contradiz o fato que $r \in (0, 1/2)$. Concluí-se que a equação não admite raízes reais. ■

Algumas perguntas interessantes podem ser feitas a respeito das parábolas que representam os gráficos de funções quadráticas.

Exemplo 3. (Rússia 1998) O ângulo formado pelos raios $y = x$ e $y = 2x$ $(x \geq 0)$ delimita dois arcos na parábola dada por $y = x^2 + px + q$, onde p e q são números reais. Prove que a diferença entre os comprimentos das projeções de cada um dos arcos sobre o eixo x é igual a 1.

Solução. Inicialmente, esboçamos a situação descrita pelo problema para que possamos compreendê-la melhor. A figura a seguir está esticada na direção horizontal para melhorar o entendimento.



O problema nos pede para demonstrar que $(x_4 - x_3) - (x_2 - x_1) = 1$.

Como x_1 e x_4 correspondem a interseção de $y = x^2 + px + q$ com $y = 2x$, eles são raízes da equação $x^2 + px + q = 2x \iff x^2 + (p-2)x + q = 0$ e portanto $x_1 + x_4 = -(p-2)$. Analogamente, x_2 e x_3 são raízes da equação $x^2 + px + q = x \iff x^2 + (p-1)x + q = 0$ e portanto $x_2 + x_3 = -(p-1)$.

Substituindo estas descobertas na expressão que queremos calcular, obtemos

$$(x_4 - x_3) - (x_2 - x_1) = x_4 + x_1 - (x_2 + x_3) = -(p-2) + (p-1) = 1,$$

como queríamos demonstrar.

Nosso último exemplo envolve a análise da trajetória de pontos após sucessivas aplicações da associação $x \mapsto f(x)$.

Exemplo 4. (OBM 2007) Seja $f(x) = x^2 + 2007x + 1$. Prove que, para todo inteiro positivo n, a equação

$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(x))\ldots)) = 0$$

possui ao menos uma solução real.

Solução. Para $n = 1$, basta mostra que a equação $f(x) = 0$ tem raiz real, o que é claro pois seu discriminante é $\Delta = 2007^2 - 4 > 0$. Sejam $x_1 < x_2$ as raízes.

Para $n = 2$, precisamos mostrar que $f(x) = x_1$ ou $f(x) = x_2$ admite alguma raiz real. A soma $x_1 + x_2$ é igual a -2007, logo $x_2 > -2007/2$. Note porém, que o mínimo de f é igual a $-\Delta/4 = -2007^2/4 + 1$, que é um número bastante negativo, muito menor que $-2007/2$. Isto indica que $f(x) = x_2$ admite solução real.

Para resolver o problema, mostremos que para todo $d > -\Delta/4 = -2007^2/4 + 1$, a equação $f(x) = d$ admite alguma solução maior que $-2007/2$. Com efeito, $f(x) = d$ é

equivalente a
$$x^2 + 2007x + (1 - d) = 0,$$
cujo discriminante é $2007^2 - 4(1-d) = 2007^2 + 4d - 4 > 2007^2 - 2007^2 + 4 - 4 = 0$. Mais ainda, a soma das raízes da equação é igual a -2007, sendo assim, pelo menos uma delas é maior que $-2007/2$.

Podemos agora argumentar por indução. Afirmamos que para todo n a equação funcional admite solução e que ao menos uma delas é maior que $-2007/2$.

O caso $n = 1$ já está feito.

Suponha que seja verdade para n. Seja y uma solução maior que $-2007/2$ da equação
$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(x))\ldots)) = 0.$$
Pelo que provamos no terceiro parágrafo, a equação $f(x) = y$ admite alguma solução z com z maior que $-2007/2$. Este número real z é claramente solução de
$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n+1 \text{ vezes}}(x))\ldots)) = 0.$$
Isto conclui a indução e portanto a demonstração.

A ideia deste exercício pode ser resumida por notar que, se x_{min} indica a abcissa do vértice da parábola, a imagem por f do intervalo $[x_{min}, \infty)$ contém o próprio intervalo $[x_{min}, \infty)$. Note também que se $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$, o argumento do terceiro parágrafo mostra que $f(x) = d$ admite solução real para todo $d > -\Delta/4a$.

Terminamos com os seguintes exercícios (12) para você praticar.

Problema 1. Para cada $m \in \mathbb{R}$, considere a parábola que representa o gráfico da função $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_m(x) = (m^2 + m + 1)x^2 - 2(m^2 + 1)x + m^2 - m + 1$. Mostre que todas essas parábolas tem um ponto em comum.

Problema 2. (OBM 2007) Sejam α e β as raízes da equação quadrática $(x–2)(x–3) + (x–3)(x + 1) + (x + 1)(x–2) = 0$. Determine o valor de
$$\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} + \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}.$$

Problema 3. (São Petersburgo 2009) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Seja também P o conjunto dos valores de $f(x)$ para x par e I o conjunto dos valores de $f(x)$ para x ímpar. Mostre que $P = I$ ou $P \cap I = \emptyset$.

Problema 4. (OBM 2006) Encontre todos os pares ordenados (x, y) de inteiros tais que $x^3 - y^3 = 3(x^2 - y^2)$.

Problema 5. (Coreia) É possível, através de aplicações sucessivas das seguintes transformações:

$$f(x) \mapsto x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}+1\right) \quad \text{ou} \quad f(x) \mapsto (x-1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right),$$

partir da função $f(x) = x^2 + 5x + 4$ e terminar na função $g(x) = x^2 + 10x + 8$?

Problema 6. (Aberto do Canadá 2011) Seja $f(x) = x^2 - ax + b$ uma função quadrática, onde a e b são inteiros positivos.

a) Suponha que $a = 2$ e $b = 2$. Determine o conjunto de raízes de $f(x) - x$, e o conjunto de raízes $f(f(x)) - x$.

b) Determine o número de pares de inteiros positivos (a, b) tais que $1 \leq a, b \leq 2011$ para os quais cada todas as raízes de $f(f(x)) - x$ sejam inteiras.

Problema 7. (Seleção Cone Sul) Demonstre que, se para todo n inteiro não nulo, existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $n \mid x^2 + bx + c$ (b, $c \in \mathbb{Z}$), então $x^2 + bx + c = 0$ tem raízes inteiras.

Problema 8. (Coreia 2018) Seja f uma função quadrática que satisfaz a seguinte condição: para quaisquer números reais a e b distintos, se $f(a) = f(b)$, então $f(a^2 - 6b - 1) = f(b^2 + 8)$. Encontre o valor de $\dfrac{f(8) - f(2)}{f(2) - f(1)}$.

Problema 9. (São Petersburgo 2008) Sejam a e b números reais. O gráfico de $y = x^2 + ax + b$ intersecta os eixos coordenados nos pontos A, B e C. O circumcentro do triângulo ABC é um ponto da reta $y = x$. Prove que $a + b + 1 = 0$.

Problema 10. (Rússia 2006) Dados a e b reais, seja $f(x) = x^2 + ax + b$. Suponha que a equação $f(f(x)) = 0$ tem quatro raízes reais distintas e que a soma de duas dessas raízes seja igual a -1. Prove que $b \leq -\frac{1}{4}$.

Problema 11. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática tal que $a > 0$ e $f(0) = 4$. Encontre todos os valores possíveis de a, b e c tais que $0 \leq f(x) \leq 4$ para todo $x \in [0, 3]$.

Dicas e Soluções

1. Queremos encontrar um ponto (x_0, y_0) tal que $y_0 = f_m(x_0)$ para todo $m \in \mathbb{R}$. Basta encontrar $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que o valor de $f_m(x_0)$ seja independente de m. Sendo assim reescreva $f_m(x_0)$ em termos de m:

$$f_m(x_0) = (x_0^2 - 2x_0 + 1)m^2 + (x_0^2 - 1)m + x_0^2 - 2x_0 + 1.$$

Encontre x_0 tal que a expressão acima seja uma função constante em termos de m.

2. Expandindo a expressão, verifique que α e β são raízes de uma equação do segundo grau com discriminante positivo, o que implica que $\alpha - \beta \neq 0$. Seja I o valor da expressão. Note que

$$\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1}\right) \cdot \frac{1}{\alpha-\beta}$$

e a expressão análoga vale para -2 e -3 no lugar de 1. Sendo assim $(\alpha - \beta)I$ é igual a

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha-3} - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\beta-2} - \frac{1}{\beta-3}$$

e expandindo esta expressão em duas frações, uma em função de α e outra em função β, observamos que seus numeradores são iguais a expressão do enunciado calculadas em α e β respectivamente. Como são as raízes, isto implica que o resultado dá 0 e portanto $I = 0$.

3. Lembre da observação ao fim da página 2. Se os conjuntos tem interseção então existem m e n inteiros tais que $f(2n) = f(2m+1)$. Isto implica que $2n + 2m + 1 = -b/a$. Segue também que dado $2k$ par, basta tomar l tal que $n - k = l - m$ e observar que $2k + (2l+1) = -b/a$ para concluir que $f(2k) = f(2l+1)$. O argumento similar pode ser feito para o caso ímpar. Isto prova que os conjuntos são iguais.

4. A equação é claramente satisfeita quando $x = y$, logo (a, a) com $a \in \mathbb{Z}$ é solução. Supondo que $x \neq y$, podemos fatorar o $x - y$ dos dois lados, obtendo

$$x^2 + (y-3)x + y^2 - 3y = 0.$$

Enxergando como uma equação em x, seu discriminante é igual a $-3y^2 + 6y + 9$, que tem como raízes -1 e 3. Como queremos soluções inteiras, logo pelo menos reais, esta expressão tem que ser não-negativa e portanto $-1 \leq y \leq 3$. Como y é inteiro, seus valores podem ser apenas $-1, 0, 1, 2$ ou 3. Resolvendo a equação em cada um dos casos correspondentes, encontramos as outras soluções $(x, y) = (2, -1)$, $(-1, 2)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$.

5. Observe que o discriminante de uma função quadrática $ax^2 + bx + c$ é invariante por estas transformações. Note que os discriminantes do destino e da chegada são distintos.

6. Para a letra a), $f(x) - x = 0 \iff x^2 - 3x + 2 = 0$, e pela fórmula de Bhaskara as raízes são 2 e 1. Para encontrar as soluções de $f(f(x)) - x = 0$, escreva $y = f(x)$. A equação vira um sistema de equações

$$x^2 - ax + b = y$$
$$y^2 - ay + b = x.$$

Subtraindo, ficamos com $(x-y)(x+y) = (x-y)(a-1)$ e portanto $x = y$ ou $x+y = a-1$. O primeiro caso equivale a $x^2-(a+1)+b = 0$. Já o segundo equivale a $x^2-(a-1)x+b+1-a = 0$.

Para a letra a), o segundo caso nos dá uma equação de discriminante negativo, logo as soluções são, novamente, apenas 1 e 2.

Para que todas as soluções de $f(f(x)) - x = 0$ sejam inteiras, como vimos na aula anterior, é necessário e suficiente que o discriminante seja um quadrado perfeito. Ou seja, que $(a+1)^2-4b = a^2+2a+1-4b$ e $(a-1)^2-4(b+1-a) = a^2+2a-3-4b$ sejam quadrados perfeitos. Note que estes dois quadrados tem diferença igual a 4, logo $(a+1)^2 - 4b = 4$ e $(a-1)^2 - 4(b+1-a) = 0$. Como $1 \leq b \leq 2011$, estamos interessados nos valores de a ímpares tais que $8 \leq (a+1)^2 \leq 4 * 2011 + 4 = 8048 \approx 89.7^2$. Segue então que para todo a entre 3 e 87 existe uma única solução, sendo assim existem 43 pares de soluções.

7. Suponha que a equação não admita raízes inteiras. Então $\Delta = b^2 - 4c$ não é quadrado perfeito. Assim, existem p primo, r um inteiro primo com p, e k ímpar tais que $\Delta = p^k r$. Tome $n = p^{k+1}$. Como $n \mid x^2+bx+c$ para algum valor de x inteiro, existe algum m inteiro diferente de 0 tal que a equação $x^2 + bx + c = mn \iff x^2 + bx + c - mn = 0$ admite raízes inteiras. Isto implica que o discriminante desta equação é um quadrado perfeito. Mas ele é igual a $b^2-4c+4mn = p^k r+4p^{k+1}m = p^k(r+4pm)$, que não pode ser quadrado perfeito pois contém um número ímpar (k) de fatores primos p.

8. Escreva f na forma canônica, $f(x) = m(x-r)^2 + n$. A condição implica que se $a+b = 2r$, então $a^2 - 6b - 1 = b^2 + 8$ ou $a^2 - 6b - 1 + b^2 + 8 = 2r$. Mostre que o segundo caso nunca acontece, ou seja, que a soma não pode ser sempre igual a $2r$. O primeiro caso implica que $r = -3/2$. A expressão pode ser calculada apenas com o conhecimento deste valor. O resultado é 13.

9. Dois vértices estão no eixo x (correspondendo às raízes $x_1 < x_2$) e um no eixo y. Seja $C = (0, b)$ o que está no eixo Y. Seja O o circumcentro. Prove que $O = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2})$. Seja $D = (\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$ e $E = (0, \frac{x_1+x_2}{2})$. Considere os triângulos retângulos ODA, ODB e OEC. Prove que eles são congruentes. Segue que

$$\left|\frac{x_1+x_2}{2} - b\right| = \frac{x_2-x_1}{2}.$$

Consequentemente, $b = x_1$ ou $b = x_2$. A prova é concluída com mais algumas manipulações.

10. Sejam x_1 e x_2 as raízes de $f(x) = 0$. Se as duas raízes de $f(f(x)) = 0$ que somam -1, z e w, são tais que $f(z) = f(w)$, então $a = 1$. Como as 4 raízes são distintas, os discriminantes de $f(x) = x_1$ e $f(x) = x_2$ são positivos, donde $1 - 4b + 4x_1 \geq 0$ e $1 - 4b + 4x_2 \geq 0$. Somando, encontramos a desigualdade pedida.

Caso contrário, $f(w) + f(z) = x_1 + x_2 = -a$. Logo,

$$w^2 + z^2 + a(w_1 + w_2) + 2b = -a \implies b \leq -(w^2 + z^2)/2 \leq -1/4$$

por causa da desigualdade das médias.

11. Observe que $c = 4$, pois $f(0) = 4$. Além disso, f tem que ser decrescente perto do 0, portanto $-b/2a$ tem que ser positivo. Mais ainda, pela simetria em relação ao eixo que passa por este ponto, $-b/2a \geq 3/2$, caso contrário $f(3) > 4$.

Se $-b/2a \leq 3$, temos $-6a \leq b \leq -3a$. Neste caso, f satisfaz as condições do enunciado se e só se o seu mínimo é maior ou igual a 0, ou seja, $(-b^2 + 16a) \geq 0$. Isto implica que $(3a)^2 \leq 16a$, logo $0 < a \leq 16/9$. Como b é negativo, segue também que $b \geq -4\sqrt{a}$. Note que $-4\sqrt{a} < -6a$ se e só se $a \in (0, 4/9)$. Logo, dentro deste caso, para valores de $a \in (0, 4/9)$, a função satisfaz as condições se e só se $b \in [-6a, -3a]$ e para valores de $a \in [4/9, 16/9]$ se e só se $b \in [-4\sqrt{a}, -3a]$.

Se $-b/2a \geq 3$, é necessário e suficiente que $f(3) \geq 0$, ou seja, $9a + 3b + 4 \geq 0$. Isto implica que $-3a - 4/3 \leq b \leq -6a$. Em particular, $-3a - 4/3 \leq -6a \iff a \leq 4/9$. Tente refletir porque obtemos uma cota pra a similar à anterior. Encontramos mais um intervalo possível de soluções: para $a \in (0, 4/9)$, este caso funciona se e só se $b \in [-3a - 4/3, -6a]$.

A resposta é $c = 4$, $a \in (0, 4/9)$ e $b \in [-3a - 4/3, -3a]$ ou $a \in [4/9, 16/9]$ e $b \in [-4\sqrt{a}, -3a]$.