POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

Nível 2

Produtos Notáveis

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo

Problemas

Problema 1. Prove a identidade de Brahmagupta: seja $n \in \mathbb{N}$; então

$$(a^2+nb^2)(c^2+nd^2) = (ac-nbd)^2 + n(ad+bc)^2 = (ac+nbd)^2 + n(ad-bc)^2.$$

Problema 2. a) Mostre que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

b) Determine o valor da expressão $x^2+y^2+z^2$ quando $x+y+z=13$, $xyz=72$ e $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$.

Problema 3. (Kiev Festival 2007) Encontre todos os pares de inteiros positivos (a,b) tais que

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}=\sqrt{ab-1}.$$

Problema 4. Determine x^2+y^2 e x^4+y^4 quando $x^3+y^3=6$ e $x+y=1$.

Problema 5. Considere uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais satisfazendo $a_0>0$ e $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ para $n \geq 0$.

Prove que, para qualquer valor do real positivo a_0, a_{1996} é maior que 63.

Problema 6. Quantos pares de inteiros positivos (a,b) satisfazem $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2004}$?

Problema 7. (OBM 2003) Mostre que $x^2+4y^2-4xy+2x-4y+2>0$, quaisquer que sejam os reais x e y.

Problema 8. Prove que $\underbrace{11...11}_{2n \text{ dígitos}} - \underbrace{22...22}_{n \text{ dígitos}}$ é um quadrado perfeito.

Problema 9. Para quais números naturais n, o número n^4-11n^2+49 é primo?

Problema 10. a) (Pan-Africana 2004) O número

$$4\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{97-56\sqrt{3}}$$

é inteiro?

b) (Irlanda 2016) Seja

$$a = \frac{251}{\frac{1}{\sqrt[3]{252}-5\sqrt[3]{2}}-10\sqrt[3]{63}} + \frac{1}{\frac{251}{\sqrt[3]{252}+5\sqrt[3]{2}}+10\sqrt[3]{63}}.$$

Mostre que a^3 é inteiro.

Problema 11. (OBM 2007) Ache todos os pares (x,y) de inteiros positivos tais que

$$2(x+y)+xy=x^2+y^2.$$

Problema 12. (Lusófona 2018) Determine os pares de inteiros positivos m e n que satisfazem a equação $m^2 = n^2 + m + n + 2018$.

Problema 13. Dados dois inteiros x e y tais que $x^2 + 2y$ é um quadrado perfeito, mostre que $x^2 + y$ é a soma de dois quadrados perfeitos.

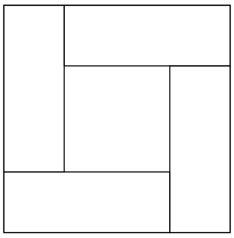
Problema 14. (Japão 2019) Se $d(x)$ expressa o número de divisores positivos de um inteiro positivo x, encontre o menor inteiro positivo n tal que $d(n^2) = d(n^2 + 7^{2019})$.

Problema 15. Sejam a e b inteiros positivos. Se $c = a + b$, mostre que $a^4 + b^4 + c^4$ é igual a duas vezes um quadrado perfeito.

Problema 16. Encontre todos os pares de inteiros positivos (x, y) tais que

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Problema 17. (Torneio das Cidades 1985) Um quadrado é dividido em 5 retângulos da maneira desenhada na figura abaixo. Cada um dos seus 4 vértices pertence a um dentre 4 retângulos cujas áreas são iguais, e o quinto retângulo não tem nenhum ponto em comum com os lados do quadrado. Mostre que o quinto retângulo é um quadrado.



Problema 18. Sejam a, b e c números racionais positivos tais que $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ também é racional. Mostre que $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$ são racionais.

Problema 19. Sejam a, b e c números reais tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Encontre as soluções reais (x, y, z) do sistema

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ (z+c)^2 = (x+a)^2 + (y+b)^2. \end{cases}$$

Problema 20. (Alemanha 2015) Determine todos os pares de números reais (x, y) que são soluções de

$$\begin{cases} x^3 + 9x^2y &= 10 \\ y^3 + xy^2 &= 2. \end{cases}$$

Problema 21. (Cone-Sul 2014) Seja n um inteiro positivo. Mostre que

$$n^2 - 2^{2014} \times 2014\, n + 4^{2013}(2014^2 - 1)$$

não é um número primo.

Problema 22. (Holanda 2011) Determine todos os pares de números reais positivos (a, b) com $a > b$ satisfazendo as seguintes equações:

$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 134 \quad \text{e} \quad a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 126.$$

Problema 23. (Centro-americana 2018) Sejam x e y números reais tais que $x - y$, $x^2 - y^2$ e $x^3 - y^3$ são todos números primos. Prove que $x - y = 3$.

Problema 24. Se a, b e c são reais não nulos que satisfazem $a + b + c = 0$, calcule

$$\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2 \cdot (a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2}.$$

Problema 25. Fatore $x^4 + x^2 + 1$ e $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

Problema 26. (Polônia 2018) Existem números reais positivos a, b, c, x tais que $a^2 + b^2 = c^2$ e $(a + x)^2 + (b + x)^2 = (c + x)^2$?

Problema 27. Considere o triângulo ABC cujos comprimentos dos lados são a, b e c, onde a é o maior lado. Prove que ABC é retângulo se, e somente se,

$$(\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b})(\sqrt{a + c} + \sqrt{a - c}) = (a + b + c)\sqrt{2}.$$

Problema 28. (Turquia 2006) Encontre todas as triplas de números inteiros (x, y, z) tais que

$$\begin{cases} x - yz = 11 \\ xz + y = 13. \end{cases}$$

Problema 29. a) Mostre que $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$.

Observe que se m e n são inteiros positivos com $m > n$, então $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$ formam uma terna pitagórica, ou seja, são inteiros positivos que satisfazem $a^2 + b^2 = c^2$.

b) Mostre que toda terna pitagórica (a, b, c) na qual a, b e c são primos entre si dois a dois se escreve como $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$, onde m e n são inteiros primos entre si.

Problema 30. Este exercício tem vários itens esobre uma relação importante envolvendo cubos de três números.

a) Sejam a, b e c números reais tais que $a + b + c = 0$. Mostre que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$.

b) Fatore $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. Observe que a afirmação da letra a) indica que $(a + b + c)$ é um dos fatores.

c) Fatore $(a + 2b - 3c)^3 + (b + 2c - 3a)^3 + (c + 2a - 3b)^3$.

d) Encontre todos os pares (x, y) de números reais positivos que satisfazem

$$x^3 + y^3 = 3xy - 1.$$

Problema 31. (Ásia-Pacífico 2000) Calcule

$$\sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2}, \text{ onde } x_i = \frac{i}{101}.$$

Problema 32. a) Usando o exercício 30, mostre que se a, b e c são números reais positivos, então

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Quando vale a igualdade?

b) Sejam a, b e c números reais positivos tais que

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b-c)^3 + (a-b+c)^3 + (b+c-a)^3.$$

Prove que $a = b = c$.

Soluções

1. Expandindo as expressões, encontramos

- $(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) = a^2c^2 + na^2d^2 + nb^2c^2 + n^2b^2d^2$
- $(ac - nbd)^2 + n(ad + bc)^2 = a^2c^2 - 2nacbd + n^2b^2d^2 + n(a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2) = a^2c^2 + na^2d^2 + nb^2c^2 + n^2b^2d^2$
- $(ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2 = a^2c^2 + 2acnbd + n^2b^2d^2 + n(a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2) = a^2c^2 + na^2d^2 + nb^2c^2 + n^2b^2d^2$,

e a igualdade fica evidente.

2. a) $(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc$.

b) A última relação se escreve como $\frac{yz+zx+xy}{xyz} = \frac{3}{4}$.
Juntando com a segunda, segue que $xy + yz + zx = 54$. Pela fórmula da letra a) e a primeira relação, obtemos

$$13^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = x^2+y^2+z^2+2\cdot 54 \implies x^2+y^2+z^2 = 61.$$

3. Elevamos os dois lados ao quadrado:

$$a - 1 + b - 1 + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} = ab - 1 \iff 2\sqrt{(a-1)(b-1)} = ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1).$$

Escrevendo $(a - 1)(b - 1) = t$, vem que $2\sqrt{t} = t$, implicando que $t = 4$. Segue que $(a - 1)(b - 1) = 4$, e, como a e b são inteiros, obtemos $a - 1 = 1$, $a - 1 = 2$, ou $a - 1 = 4$. Assim, os pares (a, b) que resolvem a equação são $(2, 5)$, $(3, 3)$ e $(5, 2)$.

4. Usando o produto notável para o cubo da soma e o quadrado da soma vem que

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy]$$

Daí, pela hipótese no enunciado, segue que $6 = 1 \cdot (1 - 3xy)$, o que implica que $xy = -5/3$. Como $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, segue que $x^2 + y^2 = 13/3$. Note que

$$(x^3 + y^3)(x + y) = x^4 + xy^3 + x^3y + y^4 = x^4 + y^4 + xy(x^2 + y^2).$$

Daí, $x^4 + y^4 = 6 \cdot 1 - (-\frac{5}{3} \cdot \frac{13}{3}) = \frac{119}{9}$.

5. Elevando ao quadrado, obtemos $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n^2} = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}$. Segue que $a_{n+1}^2 > a_n^2 + 2$ e, consequentemente, $a_{1996}^2 > a_0 + 1996 \cdot 2 > 3992$, pois $a_0 > 0$. Mas como $63^2 = 3969 < 3992 < a_{1996}^2$, segue que $a_{1996} > 63$.

6. Expandindo a equação, obtemos

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{2004} \iff 2004(a + b) = ab.$$

Somando 2004^2 dos dois lados, ficamos com

$$2004^2 = 2004^2 - 2004a - 2004b + ab = (2004 - a)(2004 - b).$$

Dessa maneira, $2004 - a$ divide 2004^2 e $2004 - b$ também. Observe que ambos inteiros são menores que 2004, pois a e b são positivos. Daí, como seu produto tem que ser igual a 2004^2, ambos tem que ser negativos. Note que cada escolha $2004 - a = d$, com $d \mid 2004^2$ e d negativo, determina um par de soluções, $a = 2004 - d$ e $b = 2004 - \frac{2004^2}{d}$. Como 2004^2 fatorado em primos é $2004^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 167)^2$, ele tem 45 divisores negativos, donde há 45 soluções para o problema original.

7. Devemos começar tentando fatorar a expressão:

$$x^2+4y^2-4xy+2x-4y+2 = (x-2y)^2+2(x-2y)+2 = (x-2y)^2+2(x-2y)+1+1 = (x-2y+1)^2+1.$$

Apesar de não termos fatorado a expressão, como o quadrado de um número real é maior ou igual a 0, segue que a expressão original é maior ou igual a 1, logo é maior que 0.

8. Note que $10^n - 1$ é um número formado por n dígitos, todos eles iguais a 9. Dessa forma, o número que aparece no enunciado é igual a

$$\frac{10^{2n}-1}{9} - 2\frac{10^n-1}{9} = \frac{10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1}{9} = \left(\frac{10^n - 1}{3}\right)^2,$$

e como o número entre parênteses é inteiro, pois $10^n - 1$ é múltiplo de 9, temos um quadrado perfeito.

9. A expressão pode ser fatorada:

$$n^4 - 11n^2 + 49 = (n^2+7)^2 - 25n^2 = (n^2 - 5n + 7)(n^2 + 5n + 7).$$

Como n é natural, o segundo termo é sempre maior que o primeiro. Para que o resultado seja primo, é necessário que $n^2 - 5n + 7 = 1$ ou $n^2 + 5n + 7 = -1$. Resolvendo a primeira equação, encontramos $n = 2$ ou $n = 3$. Mas neste caso, n^2+5n+7 é igual a 21 ou 31 respectivamente. Já a segunda equação não tem raízes reais. Segue que a expressão resulta em um número primo apenas quando $n = 3$.

10. a) A ideia deste exercício é tentar usar o produto notável para o quadrado da soma. Note que $1 + 3 = 4$. Logo, $4 - 2\sqrt{3} = (1 - \sqrt{3})^2$.

Analogamente, observamos inicialmente que $56\sqrt{3} = 2 \cdot 28\sqrt{3}$. Se encontramos dois números a e b tais que $a^2 + b^2 = 97$ e $ab = 28\sqrt{3}$, a segunda raiz será igual a $\sqrt{(a-b)^2}$. Escrevemos $b = \frac{28\sqrt{3}}{a}$, donde, fazendo $t = a^2$,

$$a^2 + b^2 = a^2 + \frac{2352}{a^2} = 97 \implies t^2 - 97t + 2352 = 0 \implies t = \frac{97 \pm \sqrt{97^2 - 4 \cdot 2352}}{2} = \frac{97 \pm 1}{2},$$

e concluímos que $a = 7$ e $b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ é uma possível solução. Lembrando que a raiz quadrada é sempre não-negativa, a expressão original é igual a $4(\sqrt{3} - 1) + 7 - 4\sqrt{3} = 3$, um número inteiro.

b) Façamos $x = \sqrt[3]{252}$ e $y = 5\sqrt[3]{2}$. Atente ao fato que $x^3 - y^3 = 2$ e $x^3 + y^3 = 2 \cdot 251$. Além disso, $xy = 10\sqrt[3]{63}$. Assim, o denominador na primeira expressão é igual a

$$\frac{x^3 - y^3}{2(x-y)} - 10\sqrt[3]{63} = \frac{x^2 + xy + y^2}{2} - xy = \frac{x^2 - xy + y^2}{2}$$

e, analogamente, o denominador da segunda é igual a

$$\frac{x^3+y^3}{2(x+y)}+10\sqrt[3]{63}=\frac{x^2-xy+y^2}{2}+xy=\frac{x^2+xy+y^2}{2}.$$

Dessa forma,

$$a=\frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}+\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}=(x+y)+(x-y)=2x=2\cdot\sqrt[3]{252}$$

e fica claro que $a^3=8\cdot 252$ é inteiro.

11. Multiplicando por 2 dos dois lados e passando os termos para a direita, a equação fica:

$$2(x^2+y^2)-4(x+y)-2xy=0 \iff (x-2)^2+(y-2)^2+(x-y)^2=8.$$

Como x e y são inteiros, o número 8 está escrito como soma de três quadrados perfeitos (0 sendo considerado quadrado perfeito). Mas a única forma de fazer isto é $8=0+4+4$. Daí segue que $x-y=0$, $x-y=2$ ou $y-x=2$.

No primeiro caso, temos $x-2=2$ e $y-2=2$, e daí $x=y=4$ é uma solução.

No segundo, se $y-2=2$ obtemos $x=6$ e $y=4$, mas daí $x-2=4$, logo não fornece solução. Se $y-2=0$, obtemos $x=4$ e $y=2$, e verificamos que esta é uma solução.

O terceiro caso é idêntico ao segundo quando trocamos os papéis de x e y.

Os pares que resolvem a equação são $(4,4)$, $(4,2)$ e $(2,4)$.

12. Escrevemos a equação de uma maneira equivalente mais simples:

$$m^2=n^2+m+n+2018 \iff m^2-n^2-(m+n)=2018 \iff (m+n)(m-n-1)=2018.$$

Como o número 2018 é igual a 2×1009, o produto de dois primos, e $m+n$ é maior que $m-n-1$, pois m e n são inteiros positivos, segue que as possíveis soluções se dividem em dois casos:

- $m+n=1009$ e $m-n-1=2 \implies m=506$ e $n=503$.
- $m+n=2018$ e $m+n-1=1 \implies m=1010$ e $n=1008$.

13. Suponha que $x^2+2y=Z^2$. Segue que $y=\frac{Z^2-x^2}{2}$ e então $x^2+y=\frac{Z^2+x^2}{2}$. Analisando a fórmula para o quadrado da soma, notamos que $(a+b)^2+(a-b)^2=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2=2(a^2+b^2)$. Dessa maneira, a relação acima se escreve como

$$x^2+y=\frac{Z^2+x^2}{2}=\frac{2(Z^2+x^2)}{4}=\frac{(Z+x)^2+(Z-x)^2}{4}=\left(\frac{Z+x}{2}\right)^2+\left(\frac{Z-x}{2}\right)^2.$$

Observe que x e Z tem a mesma paridade, pois $x^2+2y=Z^2$. Assim, os termos dentro dos parêntese na equação acima são ambos inteiros e x^2+y é a soma de dois quadrados perfeitos.

14. Note que $d(x)$ é um número ímpar se, e somente, se x é um quadrado perfeito. Isto implica que n^2+7^{2019} também tem que ser um quadrado perfeito, pois $d(n^2+7^{2019})=d(n^2)$.

Escrevendo $m^2=n^2+7^{2019}$, obtemos $(m-n)(m+n)=7^{2019}$. Quanto menor for n, mais próximos serão os fatores $m-n$ e $m+n$, assim, como o segundo é maior que o primeiro, o menor n tal que n^2+7^{2019} é quadrado perfeito é atingido quando $m-n=7^{1009}$ e $m+n=7^{1010}$. Neste caso, $n=3\cdot 7^{1009}$ e $m^2=n^2+7^{2019}=16\cdot 7^{2018}=2^4\cdot 7^{2018}$, mas infelizmente $5\cdot 2019=d(n^2+7^{2019})>d(n^2)=3\cdot 2019$.

Por outro lado, quando $m-n=7^{1008}$ e $m+n=7^{1011}$, encontramos $n=171\cdot 3^{1008}=3^2\cdot 19\cdot 7^{1008}$ e $m=172\cdot 3^{1008}=2^2\cdot 43\cdot 7^{1008}$, portanto $d(m^2)=d(n^2+7^{2019})=d(n^2)$. Concluímos que $n=171\cdot 3^{1008}$ é o menor valor.

15. Começamos calculando c^4:

$$c^2 = (a^2+b^2+2ab) \implies c^4 = (a^2+b^2)^2 + 2\cdot 2ab(a^2+b^2) + (2ab)^2 = a^4+b^4+6a^2b^2+4ab(a^2+b^2).$$

Daí,

$$a^4+b^4+c^4 = 2a^4+2b^4+6a^2b^2+4ab(a^2+b^2) = 2[(a^4+b^4+2a^2b^2)+2ab(a^2+b^2)+a^2b^2] = 2[(a^2+b^2)^2+2ab(a^2+b^2)+(ab)^2] = 2(a^2+b^2+ab)^2$$

que é o dobro de um quadrado perfeito.

16. Passando o termo $\sqrt{x+y}$ para o lado esquerdo e elevando ao quadrado, obtemos

$$(\sqrt{xy}-\sqrt{x+y})^2 = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \iff xy - 2\sqrt{x+y}\sqrt{xy} + x + y = x + 2\sqrt{xy} + y.$$

Cancelando os termos em comum dos dois lados e dividindo por $\sqrt{xy}$, que é positivo, a equação equivale a

$$\sqrt{xy} = 2(\sqrt{x+y}+1).$$

Elevando ao quadrado dos dois lados, obtemos

$$xy = 4(x+y+2\sqrt{x+y}+1).$$

Isto implica que $\sqrt{x+y}$ é um inteiro positivo e xy é um quadrado perfeito par. Escrevendo $xy = 4a^2$ com $a \in \mathbb{N}$ e manipulando a segunda equação acima, obtemos $a - 1 = \sqrt{x+y}$. Substituindo na equação original, obtemos

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = 2a - (a-1) = a+1.$$

Dessa forma, $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ são raízes da equação do segundo grau

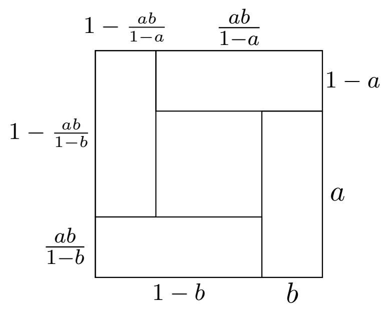
$$t^2 - (a+1)t + 2a = 0.$$

Para que as soluções sejam inteiras, seu Δ tem que ser um quadrado perfeito b^2. Assim,

$$\Delta = (a+1)^2 - 8a = b^2 \implies (a-3)^2 - 8 = b^2.$$

Os únicos quadrados perfeitos que distam 8 um do outro[1] são 1 e 9. Dessa forma, $a - 3 = 3$, o que implica que $a = 6$. Substituindo na equação em t acima, ficamos com $t^2 - 7t + 12 = 0$, o que implica que $t = 3$ ou $t = 4$. Segue daí que $(9, 16)$ e $(16, 9)$ são os únicos pares que resolvem a equação original.

17. Suponha que o quadrado que é dividido em retângulos tenha lados iguais a 1. Sempre podemos supor isto ampliando ou reduzindo a figura. Sejam a e b os lados de um dos quatro retângulos que contém os vértices. Como ab é a área deste retângulo, usando o fato que os quatro tem a mesma área, podemos encontrar os lados dos outros retângulos, como indicado na figura.



[1] Note que se $a > 3$, $(a+1)^2 - a^2 = 2a+1 \geq 9$. Basta checar casos pequenos então.

Segue daí que

$$\left(1 - \frac{ab}{1-b}\right)\left(1 - \frac{ab}{1-a}\right) = ab.$$

Multiplicando os dois lados por $(1-a)(1-b)$, ficamos com

$$\begin{aligned}
[(1-b)-ab]\cdot[(1-a)-ab] = ab(1-a)(1-b) \iff \\
\iff (1-a)(1-b) - ab(2-a-b) + (ab)^2 = ab(1-a-b+ab) \iff \\
\iff 1-a-b+ab-2ab+a^2b+ab^2+(ab)^2 = ab-a^2b-ab^2+(ab^2) \iff \\
\iff 1-a-b-2ab+2a^2b+2ab^2 = 0 \iff \\
\iff 1-a-b-(1-a-b)\cdot 2ab = 0 \iff (1-a-b)(1-2ab) = 0.
\end{aligned}$$

Note que $ab < 1/4$, pois a soma das áreas dos quatro retângulos é menor que a área do quadrado original, que é igual a 1. Segue daí que $1-2ab \neq 0 \implies 1-a-b=0 \implies 1-a=b$. Substituindo o valor de b, encontramos que todos os retângulos tem lados iguais a a e $1-a$. Concluímos a partir daí que o retângulo central é um quadrado de lados $2a-1$, supondo que a corresponde ao maior dos lados de qualquer um dos retângulos que contém vértices do quadrado inicial.

18. Seja $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = q \in \mathbb{Q}$. Se $q=0$, então $a=b=c=0$. Se $q \neq 0$, segue que

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (q-\sqrt{c})^2 \iff a+2\sqrt{ab}+b = q^2-2q\sqrt{c}+c \iff \sqrt{c} = \frac{q^2+c-a-2\sqrt{ab}-b}{2q}.$$

Daí, $\sqrt{c} = p_1 \cdot \sqrt{ab} + p_2$ com

$$p_1 = -\frac{1}{q} \quad \text{e} \quad p_2 = -\frac{a+b-q^2-c}{2q}$$

números racionais. Note que $p_1 \neq 0$. Por outro lado, $q^2 = a+b+c+2ab+2bc+2ca$ e então $q^2+c-a-b > 0$, donde $p_2 \neq 0$. Elevando ao quadrado novamente, segue que

$$c = p_1^2 ab + 2p_1p_2\sqrt{ab} + p_2^2 \implies \sqrt{ab} = \frac{c-p_1^2ab-p_2^2}{2p_1p_2} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{c} \in \mathbb{Q}.$$

Poderíamos progredir de forma completamente análoga para concluir que $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ também são racionais.

19. A segunda igualdade se escreve

$$z^2+2zc+c^2 = x^2+2xa+a^2+y^2+2yb+b^2.$$

Usando que $a^2+b^2=c^2$ e $x^2+y^2=z^2$, segue que $2zc = 2xa+2yb \implies ax+by=cz$.

Multiplicando a condição em a, b e c pela primeira equação, segue que

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2) = z^2c^2 = (ax+by)^2 \implies a^2y^2+b^2x^2 = 2abxy \implies (ay-bx)^2 = 0.$$

Encontramos assim $ay-bx=0$. Multiplicando $x^2+y^2=z^2$ por a^2 e substituindo esta relação, obtemos

$$a^2z^2 = a^2x^2+a^2y^2 = (a^2+b^2)x^2 = c^2x^2 \implies x = \pm\frac{a}{c}z.$$

Daí, como $ay-bx=0$ e $ax+by=cz$, segue que $x = \frac{a}{c}z$ e $y = \frac{b}{c}z$. É fácil verificar que para cada $z \in \mathbb{R}$ a tripla $\left(\frac{a}{c}z, \frac{b}{c}z, z\right)$ resolve o problema.

20. A primeira equação se escreve como $x^3 + 3(x^2 \cdot 3y) = 10$. Já a segunda, quando multiplicada por 27, se escreve como $(3y)^3 + 3 \cdot x(3y)^2 = 54$. Somando os dois termos, obtemos

$$x^3 + 3(x^2 \cdot 3y) + 3 \cdot x(3y)^2 + (3y)^3 = (x + 3y)^3 = 64 \implies x + 3y = 4.$$

Substituindo $3y = 4 - x$ na primeira equação ficamos com

$$x^3 + 3[x^2 \cdot (4 - x)] = 10 \iff x^3 - 6x^2 + 5 = 0.$$

É fácil ver que 1 é solução da equação acima. Isto indica que é possível fatorar a expressão acima usando algum fator $(x - 1)$. Com efeito,

$$x^3 - 6x^2 + 5 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5 = x^2(x-1) - 5(x^2 - 1) = x^2(x-1) - 5(x+1)(x-1) = (x-1)(x^2 - 5x - 5).$$

Daí, as soluções da equação acima são

$$x = 1, \quad x = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

Assim, os pares de solução são

$$(1, 1)\,, \quad \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

21. Observe que $4^{2013} = (2^{2013})^2$. Daí,

$$\begin{aligned} n^2 - 2^{2014} \times 2014n + 4^{2013}(2014^2 - 1) &= n^2 - 2 \cdot 2^{2013} \cdot 2014 \cdot n + (2^{2013})^2 \cdot 2014^2 - (2^{2013})^2 = \\ (n - 2^{2013} \cdot 2014)^2 - (2^{2013})^2 &= (n - 2^{2013} \cdot 2014 - 2^{2013})(n - 2^{2013} \cdot 2014 + 2^{2013}) = \\ &(n - 2^{2013} \cdot 2015)(n - 2^{2013} \cdot 2013). \end{aligned}$$

Assim a expressão se escreve com produto de dois números inteiros. Ela só pode resultar em um número primo quando um dos fatores tem módulo igual a 1 e o outro tem módulo igual a um número primo e o mesmo sinal do outro fator. Isto, devido ao fato que o segundo fator é maior que o primeiro, nos deixa com dois casos:

- $n - 2^{2013} \cdot 2015 = 1 \implies n - 2^{2013} \cdot 2013 = 1 + 2^{2013} \cdot 2 = 1 + 2^{2014}$. Mas, como $2^4 \equiv 1 \mod 5$, $2^{2014} \equiv 2^2 \equiv 4 \mod 5$. Segue daí que $1 + 2^{2014}$ é múltiplo de 5 e o número original não é primo.
- $n - 2^{2013} \cdot 2013 = -1 \implies n - 2^{2013} \cdot 2015 = -1 - 2^{2013} \cdot 2 = -(1 + 2^{2014})$. Neste caso seguimos a análise anterior e concluímos que o número também não é primo.

22. Escreva $\sqrt{a} = x$ e $\sqrt{b} = y$. As equações se escrevem como

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 134 \\ x^2y + xy^2 &= 126. \end{aligned}$$

Somando a primeira com três vezes a segunda obtemos

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 512 \implies x + y = 8.$$

Por outro lado, subtraindo as duas equações, ficamos com

$$x^3 + y^3 - x^2y + xy^2 = x(x^2 - y^2) - y(x^2 - y^2) = x(x+y)(x-y) - y(x+y)(x-y) = (x+y)(x-y)^2 = 8.$$

E como $x+y=8$ obtemos $x-y=1$ ou $x-y=-1$.

No primeiro caso, resolvendo o sistema linear, encontramos $x=\frac{9}{2}$ e $y=\frac{7}{2}$, donde $a=\frac{81}{4}$ e $b=\frac{49}{2}$.

No segundo caso, resolvendo o sistema linear, encontramos $x=\frac{7}{2}$ e $y=\frac{9}{2}$, o que implica $b>a$. Mas como estamos interessados apenas em pares (a,b) com $a>b$, podemos desconsiderar este caso. A única solução é $a=\dfrac{81}{4}$ e $b=\dfrac{49}{2}$.

23. Sejam p, q e r primos, e $x-y=p$, $x^2-y^2=q$ e $x^3-y^3=r$. Lembramos que x e y não são necessariamente inteiros. Comparando a segunda equação com a primeira, encontramos

$$q=x^2-y^2=(x+y)(x-y)=p(x+y)\implies x+y=\frac{q}{p}.$$

Resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} x+y=\frac{q}{p} \\ x-y=p \end{cases}$$

encontramos $x=\dfrac{q+p^2}{2p}$ e $y=\dfrac{q-p^2}{2p}$. Isto implica que $xy=\frac{q^2-p^4}{4p^2}$. A terceira equação pode ser combinada com as outras duas e esta última relação de forma a obter

$$r=x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x-y)[(x+y)^2-xy]=$$
$$p\left[\left(\frac{q}{p}\right)^2-\frac{q^2-p^4}{4p^2}\right]=\frac{3q^2-p^4}{4p}.$$

E daí segue que $p(4r-p^3)=3q^2$. Como p e q são primos entre si, segue que $3\mid p$. Como p é primo, segue que $p=3$. Note que existe solução, por exemplo, $p=3$, $q=5$ e $r=13$ são obtidos quando $x=\frac{7}{3}$ e $y=-\frac{2}{3}$. Isto conclui a prova.

24. Da relação inicial, sabemos que $c=-(a+b)$. O objetivo é escrever a expressão em termos de $(a+b)$ e ab. Primeiramente, note que $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Isto implica que $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$. Por outro lado,

$$(a^2+b^2)^2=a^4+b^4+2a^2b^2\implies a^4+b^4=[(a+b)^2-2ab]^2-2(ab)^2,$$

e $(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^5+b^5+a^3b^2+a^2b^3$ implica que

$$a^5+b^5=[(a+b)^2-2ab]\cdot[(a+b)^3-3ab(a+b)]-(ab)^2(a+b).$$

Expandindo as expressões acima, ficamos com

$$\begin{aligned} a^4+b^4&=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2(ab)^2\\ a^5+b^5&=(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5(ab)^2(a+b). \end{aligned}$$

Substituindo na expressão original, usando o fato que $c=-(a+b)$ ficamos com

$$\frac{[(a+b)^3-3ab(a+b)-(a+b)^3]^2\cdot[(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2(ab)^2+(a+b)^4]}{[(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5(ab)^2(a+b)-(a+b)^5]^2}=$$
$$\frac{[-3ab(a+b)]^2\cdot[2(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2(ab)^2]}{[-5ab(a+b)^3+5(ab)^2(a+b)]^2}=$$
$$\frac{9[(ab)^2(a+b)^2]\cdot 2[(a+b)^4-2ab(a+b)^2+(ab)^2]}{25[(ab)^2(a+b)^6-2(ab)^3(a+b)^4+(ab)^4(a+b)^2]}=$$
$$\frac{18}{25}\cdot\frac{(ab)^2(a+b)^6-2(ab)^3(a+b)^4+(ab)^4(a+b)^2}{(ab)^2(a+b)^6-2(ab)^3(a+b)^4+(ab)^4(a+b)^2}=\frac{18}{25}.\blacksquare$$

25. Para fatorar a primeira expressão usamos o truque de somar e subtrair x^2:

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1).$$

Já para a segunda basta usar produtos notáveis de cubos repetidamente

$$\begin{aligned}(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = (x + y + z)^3 - x^3 - (y^3 + z^3) =\\ (x + y + z - x) \cdot [(x + y + z)^2 + (x + y + z)x + x^2] - (y + z) \cdot (y^2 - yz + z^2) =\\ (y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + x^2 + yx + zx + x^2) - (y + z)(y^2 - yz + z^2) =\\ (y + z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx) = 3(y + z)[x(x + y) + z(y + x)] =\\ 3(y + z)(x + z)(x + y),\end{aligned}$$

onde na passagem da segunda linha para a terceira usamos a fórmula para $(x+y+z)^2$ encontrado no primeiro exercício desta lista. A segunda expressão então fatora como

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x).$$

26. Suponha que existam tais números. Expandindo a igualdade do enunciado, obtemos

$$(a + x)^2 + (b + x)^2 = (c + x)^2 \iff a^2 + 2ax + x^2 + b^2 + 2bx + x^2 = c^2 + 2cx + x^2.$$

Como $a^2 + b^2 = c^2$ e $x > 0$, a equação acima nos dá $x = 2(c - b - a)$. Mas isto implica que $c > a + b$, novamente porque $x > 0$. Contudo segue daí, como a, b e c também são positivos, que

$$c^2 > (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \implies 2ab < 0,$$

uma contradição com a e b positivos. Logo não existem tais números.

27. Pelo teorema de Pitágoras, o triângulo é retângulo se e somente se $a^2 = b^2 + c^2$. Por outro lado, como os dois lados da igualdade no enunciado são positivos, segue que

$$\begin{aligned}(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}) = \sqrt{2}(a + b + c) \iff\\ (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})^2 \cdot (\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c})^2 = [\sqrt{2}(a + b + c)]^2 \iff\\ (a + b + 2\sqrt{(a+b)(a-b)} + a - b) \cdot (a + c + 2\sqrt{(a+c)(a-c)} + a - c) = 2(a + b + c)^2 \iff\\ (2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}) \cdot (2a + 2\sqrt{a^2 - c^2}) = 2(a + b + c)^2.\end{aligned}$$

Suponhamos primeiro que o triângulo é retângulo. Daí, como $a^2 = b^2 + c^2$,

$$\begin{aligned}(2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}) \cdot (2a + 2\sqrt{a^2 - c^2}) = 2(a + b + c)^2 \iff\\ 2(a + c)(a + b) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \iff\\ 2a^2 + 2ab + 2bc + 2ca = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \iff\\ a^2 = b^2 + c^2,\end{aligned}$$

que é verdade.

Suponha por outro lado que ABC não é retângulo. Para concluir o problema, basta mostrar que a igualdade acima não acontece. Pelo teorema de Pitágoras, temos dois casos: $a^2 > b^2 + c^2$ e $a^2 < b^2 + c^2$. No primeiro caso, $\sqrt{a^2 - b^2} > \sqrt{(b^2 + c^2) - b^2} > \sqrt{c^2} = c$ e analogamente $\sqrt{a^2 - c^2} > b$. Segue que

$$\begin{aligned}(2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}) \cdot (2a + 2\sqrt{a^2 - c^2}) > (2a + 2c)(2a + 2b) =\\ 2(2a^2 + 2ab + 2bc + 2ca) > 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) = 2(a + b + c)^2,\end{aligned}$$

logo a igualdade não é verdadeira.

Por outro lado, se $a^2 < b^2 + c^2$, vem que $\sqrt{a^2 - b^2} < \sqrt{(b^2 + c^2) - b^2} < \sqrt{c^2} = c$ e analogamente $\sqrt{a^2 - c^2} < b$. Segue que

$$(2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}) \cdot (2a + 2\sqrt{a^2 - c^2}) < (2a + 2c)(2a + 2b) =$$
$$2(2a^2 + 2ab + 2bc + 2ca) < 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) = 2(a + b + c)^2,$$

donde se conclui a equivalência.

28. Somando as duas equações elevadas ao quadrado ficamos com

$$(x - yz)^2 + (xz + y)^2 = 11^2 + 13^2 \iff x^2 - 2xyz + y^2z^2 + x^2z^2 + 2xyz + y^2 = 290 \iff$$
$$x^2 + y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = (x^2 + y^2)(z^2 + 1) = 290 = 2 \times 5 \times 29.$$

Como os números x, y e z são inteiros, eles tem que ser divisores de 290. Como este número tem 8 divisores, analisamos 8 casos. Se $z^2 + 1 =$

- 1, então $z = 0$ e isto implica que $x = 11$ e $y = 13$ substituindo no sistema original.
- 2, então $z = 1$ ou $z = -1$. Substituindo $z = 1$ no sistema original ele vira $x - y = 11$ e $x + y = 13$, e daí $x = 12$ e $y = 1$. Substituindo $z = -1$ e resolvendo o sistema linear que aparece, obtemos $x = -1$ e $y = 12$.
- 5, então $z = 2$ ou $z = -2$. Substituindo no sistema $z = 2$ e resolvendo encontramos $x = 37/5$ e $y = -9/5$, logo não são inteiros. Analogamente, fazendo $z = -2$, vem que $x = -3$ e $y = 7$.
- 29, então z não é inteiro.
- 10, então $z = 3$ ou $z = -3$. Quando $z = 3$, o sistema linear que obtemos nos dá como soluções $x = 5$ e $y = -2$. Quando $z = -3$ obtemos $x = -14/5$ e $y = 23/5$.
- 58, então z não é inteiro.
- 145, então $z = 12$ ou $z = -12$. Mas neste caso $x^2 + y^2 = 2$ e daí $x^2 = y^2 = 1$. Testando os casos encontramos $x = 1$, $y = -1$ e $z = 12$; e $x = -1$, $y = 1$ e $z = -12$ como soluções.
- 290, então z não é inteiro.

Dessa forma, as soluções são

$$(11, 13, 0),\ (12, 1, 1),\ (-1, 12, -1),\ (-3, 7, -2),\ (5, -2, 3),\ (1, -1, 12),\ (-1, 1, -12).$$

29. a) Este item é simples, basta usar os produtos notáveis:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2.$$

b) Se a, b e c são inteiros primos entre si dois a dois que formam uma terna pitagórica, então, como $a^2 + b^2 = c^2$, obtemos que c é ímpar e um dos dois números a ou b é par e o outro ímpar. Com efeito, se c fosse par, então a e b teriam que ser ímpares, mas neste caso o lado esquerdo deixaria resto 2 quando dividido por 4 e o direito seria múltiplo de 4, o que é impossível. Suponhamos sem perda de generalidade que b é par.

Daí, $b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a)$, e se k divide $c+a$ e $c-a$ então k divide $(c+a)+(c-a) = 2c$ e $(c+a)-(c-a) = 2a$. Dessa forma, k divide 2, pois a e c são primos entre si. De fato, $\text{mdc}(c+a, c-a) = 2$, pois ambos são pares. Como b é par, 4 divide b^2. Assim,

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c+a}{2} \cdot \frac{c-a}{2}$$

e como os dois números do lado direito são primos entre si obtemos $c+a = 2m^2$ e $c-a = 2n^2$ para algum par de inteiros m e n primos entre si. Segue daí que $a = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$ e

$$b^2 = (c+a)(c-a) = 2m^2 \cdot 2n^2 = 4m^2n^2 \implies b = 2mn. \blacksquare$$

30. a) Note que $c = -(a+b)$. Daí,

$$c^3 = -(a+b)^3 = -(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3),$$

donde segue que

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + b^3 - (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - 3ab[-(a+b)]) = \\ a^3 + b^3 - a^3 - b^3 - 3a^2b - 3ab^2 + 3a^2b + 3ab^2 = 0. \end{aligned}$$

b) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + c^3 - 3abc$. Como observado no enunciado, $a+b+c$ é um bom candidato a fator. Isto nos incentiva a somar e subtrair $c(a^2 - ab + b^2)$ na expressão acima. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + c^3 - 3abc + c(a^2 - ab + b^2) - c(a^2 - ab + b^2) = \\ (a+b+c)(a^2 - ab + b^2) + c^3 - 3abc - c(a^2 - ab + b^2) = \\ (a+b+c)(a^2 - ab + b^2) + c^3 - 3abc - c[(a+b)^2 - 3ab] = \\ (a+b+c)(a^2 - ab + b^2) + c^3 - c(a+b)^2 = \\ (a+b+c)(a^2 - ab + b^2) + c[c^2 - (a+b)^2] = \\ (a+b+c)(a^2 - ab + b^2) + c(c+a+b)(c-a-b) = \\ (a+b+c)[a^2 - ab + b^2 + c(c-a-b)] = \\ (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \end{aligned}$$

c) Escreva $x = a + 2b - 3c$, $y = b + 2c - 3a$ e $z = c + 2a - 3b$. Note que $x + y + z = 0$. Segue daí, pela letra a), que $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Obtemos então,

$$(a+2b-3c)^3 + (b+2c-3a)^3 + (c+2a-3b)^3 = 3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b).$$

d) Faça $a = x$, $b = y$ e $c = 1$. A equação se escreve como $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$. Pela letra b), o lado esquero fatora como

$$\begin{aligned} (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \iff \\ (x+y+1)(x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy) = 0. \end{aligned}$$

Segue que $x + y = -1$ ou $x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy = 0$. No primeiro caso, um dos dois números, x ou y, tem que ser negativo. No segundo, podemos multiplicar a expressão por 2 e encontrar

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2x - 2y - 2xy = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + x^2 - 2xy + y^2 = 0 \iff \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 0. \end{aligned}$$

O lado esquerdo só se anula quando $x = y = 1$. Segue que esta é a única solução da equação.

31. Observe que, pelo produto notável para o cubo da soma,

$$\frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}=\frac{x_i^3}{(1-x_i)^3+x_i^3}.$$

Note porém que $1-x_i=1-\dfrac{i}{101}=\dfrac{101-i}{101}=x_{101-i}$. Logo,

$$2\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}=2\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^3}{(1-x_i)^3+x_i^3}=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^3}{(x_{101-i})^3+x_i^3}+\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^3}{(x_{101-i})^3+x_i^3}=$$

$$\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^3}{(x_{101-i})^3+x_i^3}+\sum_{j=0}^{101}\frac{x_{101-j}^3}{(x_j)^3+x_{101-j}^3}=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^3+(x_{101-i})^3}{(x_{101-i})^3+x_i^3}=\sum_{i=0}^{101}1=102.$$

Segue que a soma pedida é igual a $\frac{102}{2}=51$.

32. a) Escreva $a=x^3$, $b=y^3$ e $c=z^3$. Daí

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\iff x^3+y^3+z^3-3xyz\geq 0\iff(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\geq 0,$$

por causa da fatoração encontrada na letra b) do exercício 30. Como a, b e c são positivos, x, y e z também são, e a desigualdade acima equivale a

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 0.$$

Multiplicando por 2, obtemos a desigualdade equivalente

$$\begin{aligned}2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\geq 0 &\iff\\ \iff x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2\geq 0 &\iff\\ \iff (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0&,\end{aligned}$$

o que é sempre verdade, pois um número real elevado ao quadrado sempre resultam em um número não-negativo. Observe que a igualdade acontece somente quando

$$x-y=0,\ y-z=0 \text{ e } z-x=0\implies a=b=c.$$

b) Expandimos o primeiro termo do lado direito usando produtos notáveis:

$$\begin{aligned}(a+b-c)^3=(a+b)^3-3(a+b)c(a+b-c)-c^3=\\ a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2c-3abc+3ac^2-3abc-3b^2c+3bc^2-c^3=\\ a^3+b^3-c^3+3a^2b+3ab^2+3ac^2+3bc^2-3a^2c-3b^2c-6abc.\end{aligned}$$

Trocando as posições de a, b e c na expressão acima, encontramos

$$\begin{aligned}(a-b+c)^3&=a^3-b^3+c^3+3a^2c+3ac^2+3ab^2+3b^2c-3a^2b-3bc^2-6abc\\ (b+c-a)^3&=-a^3+b^3+c^3+3b^2c+3bc^2+3a^2b+3a^2c-3ab^2-3ac^2-6abc,\end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned}(a+b-c)^3+(a-b+c)^3+(b+c-a)^3=a^3+b^3-c^3+a^3-b^3+c^3-a^3+b^3+c^3+\\ (3a^2b-3a^2b+3a^2b)+(3ab^2+3ab^2-3ab^2)+(-3b^2c+3b^2c+3b^2c)+(3bc^2-3bc^2+3bc^2)+\\ (3c^2a+3c^2a-3c^2a)+(-3ca^2+3ca^2+3ca^2)-18abc=\\ a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-6abc)\end{aligned}$$

Dessa maneira, a igualdade equivale a

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 = 6abc.$$

Mas pela desigualdade das médias aplicada termo a termo, $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \geq 2\sqrt{a^3b^3} + 2\sqrt{b^3c^3} + 2\sqrt{c^3a^3}$, e por outro lado, pela letra a),

$$2\sqrt{a^3b^3} + 2\sqrt{b^3c^3} + 2\sqrt{c^3a^3} \geq 2 \cdot 3\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^3} \cdot \sqrt{b^3c^3} \cdot \sqrt{c^3a^3}} = 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = 6abc.$$

Só existe igualdade quando $\sqrt{a^3b^3} = \sqrt{b^3c^3} = \sqrt{c^3a^3}$, o que implica que $a = b = c$.