Problemas Resolvidos

Nível 2

Divisibilidade I

Problemas

Problemas

Problema 1. Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.

Problema 2. Determinar os números que divididos por 17 dão um resto igual ao quadrado do quociente correspondente.

Problema 3. (OCM 1994, adaptado) Seja $A = 777\ldots77$ um número onde o dígito 7 aparece 1001 vezes. Determinar o resto da divisão de A por 1001.

Problema 4. Encontre um inteiro que deixa resto 4 na divisão por 5 e resto 7 na divisão por 13.

Problema 5. Encontre o menor inteiro positivo que, dividido por 29 deixa resto 5, e dividido por 31 dá resto 28.

Problema 6. Prove que, para todo inteiro positivo n o número $n^5 - 5n^3 + 4n$ é divisível por 120.

Problema 7. Prove que o número $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$ é múltiplo de 5.

Problema 8. Mostre que o número $1^n + 8^n - 3^n - 6^n$ é múltiplo de 10 para todo natural n.

Problema 9. Encontre o resto da divisão de $37^{10} - 1$ por 11.

Problemas que usam fatoração

Problema 10. Prove que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é divisível por 7.

Problema 11. Encontre o último dígito de 1989^{1989}.

Problema 12. Mostre que se n divide a, então $2^n - 1$ divide $2^a - 1$.

Problema 13. (Cone Sul 1996) Prove que o número

$$\frac{1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1}{1996^2}$$

é um inteiro.

Problema 14. Mostre que para n ímpar, n divide $1^n + 2^n + \cdots (n-1)^n$.

Soluções

1. Se um número inteiro n deixa resto igual ao quociente na divisão por 7, então ele pode ser escrito como $n = 7q + q$, onde o quociente e o resto são representados por q. Como q é resto na divisão por 7 ele deve satisfazer $0 \leq q < 7$. Note que $n = 8q$ e, considerando todos os possíveis valores de q, encontramos que os possíveis valores de n são $0, 8, 16, 24, 32$ e 48.

2. Os números inteiros n que estamos procurando devem satisfazer $n = 17q + q^2$, onde $0 \leq q^2 < 17$ ou, equivalentemente, $-4 \leq q \leq 4$. Note que n pode ser inteiro negativo. Considerando todos os possíveis valores de q, obtemos que os possíveis valores de n são $-52, -42, -30, -16, 0, 18, 38, 60$ e 84.

3. Note que 10^6 deixa resto 1 na divisão por 1001, logo, para qualquer inteiro positivo k, temos que 10^{6k} também deixa resto 1 na divisão por 1001. O maior múltiplo de 6 que é menor que 1001 é 996. Vamos escrever A como

$$A = 7 \times \left(11111 \times 10^{996} + \frac{10^{996} - 1}{9}\right).$$

Então o resto da divisão de A por 1001 será o mesmo resto da divisão de 7×11111 por 1001, que é igual a 700.

4. Um número inteiro n que satisfaz as condições do problema pode ser escrito como $n = 5q_1 + 4$ e como $n = 13q_2 + 7$, onde q_1 e q_2 são os respectivos quocientes da divisão de n por 5 e por 13. Somando 6 nos dois lados das duas igualdades, temos $n + 6 = 5(q_1 + 2) = 13(q_2 + 1)$. Então $n + 6$ é divisível por 5 e por 13. Podemos escolher, por exemplo, $n + 6 = 5 \cdot 13$, o que daria $n = 59$.

5. Um número inteiro n que satisfaz as condições do problema pode ser escrito como $n = 29q_1 + 5$ e como $n = 31q_2 + 28$. Então q_1 e q_2 satisfazem $29q_1 = 31q_2 + 23$, o que que dizer que $29q_1$ deixa resto 23 na divisão por 31. Testando, encontramos que o menor inteiro positivo q_1 que satisfaz essa condição é $q_1 = 4$. Então $n = 29 \cdot 4 + 5 = 121$.

6. Usaremos uma fatoração:

$$\begin{aligned}
n^5 - 5n^3 + 4n &= n((n^4 - n^2) - (4n^2 - 4)) \\
&= n(n^2(n^2 - 1) - 4(n^2 - 1)) \\
&= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \\
&= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2).
\end{aligned}$$

Temos então que $n^5 - 5n^3 + 4n$ é o produto de 5 números inteiros consecutivos. Pelo menos um deles será múltiplo de 5, também pelo menos um deles será múltiplo de 3. Veja também que entre 5 números consecutivos sempre haverá pelo menos dois números pares consecutivos, portanto, um deles será múltiplo de 4. Isso garante que o produto dos 5 números será divisível por 8. Então temos que $n^5 - 5n^3 + 4n$ é divisível por $5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$.

7. Como 5^{99} é divisível por 5, descartamos este termo no nosso análise. Observe que $1^4, 2^4, 3^4$ e 4^4 deixam resto 1 na divisão por 5. Vamos escrever $99 = 3 + 4 \cdot 24$. Então, para $a = 1, 2, 3$ e 4, temos que a^{99} deixa o mesmo resto que a^3 na divisão por 5. Com isso, temos que basta encontrar o resto na divisão por 5 de $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$, que é o mesmo resto na divisão por 5 de $1 + 3 + 2 + 4$, que é igual a 0.

8. O número em questão é múltiplo de 2, pois é a substração dos números ímpares $1^n + 8^n$ e $3^n + 6^n$. Basta ver que ele também é múltiplo de 5. Veja que 8 deixa resto 3 e que 6 deixa resto 1 na divisão por 5. Então, na divisão por 5, o número que estamos analisando deixa o mesmo resto que $1^n + 3^n - 3^n - 1^n$, que é igual a 0.

9. Veja que 37 deixa resto 4 na divisão por 11. Basta encontrar o resto de $4^{10} - 1$ na divisão por 11. Observe que $4^5 = 1024$ deixa resto 1, logo $4^{10} = 4^{5 \cdot 2}$ também. Isso mostra que $4^{10} - 1$ é divisível por 11.

10. Na divisão por 7, 2222 deixa resto 3 e 5555 deixa resto 4. Nos resta mostrar que $3^{5555} + 4^{2222}$ é divisível por 7. Veja também que 3^5 deixa resto 5 e que 4^2 deixa resto 2 na divisão por 7. Basta mostrar então que $5^{1111} + 2^{1111}$ é divisível por 7.

Usaremos a seguinte fatoração: se n é ímpar, então

$$x^n + y^n = (x + y)\left(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1}\right). \tag{1}$$

Fatorando $5^{1111} + 2^{1111}$ dessa mesma forma, vemos que aparece o fator $5 + 2 = 7$, o que conclui a nossa prova.

11. Veja que $1989^{1989} = 1989 \cdot \left(1989^2\right)^{994}$. O número 1989^2 termina em 1, logo o último dígito de $\left(1989^2\right)^{994}$ também é 1. Concluímos que o último dígito de 1989^{1989} será 9.

12. Usaremos a seguinte fatoração:

$$x^n - y^n = (x - y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}\right). \tag{2}$$

Como n divide a, escrevemos $a = nk$ para um certo k inteiro. Logo

$$\begin{aligned} 2^a - 1 &= (2^n)^k - 1 \\ &= (2^n - 1)\left(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + 2^{n(k-3)} + \ldots + 2^{2n} + 2^n + 1\right), \end{aligned}$$

o que conclui a prova.

13. Escrevemos $a = 1996$ e a expressão do exercício fica:

$$\frac{(a-1)(a+1)^a - a(a+1)^{a-1} + 1}{a^2}.$$

Faremos algumas manipulações algébricas no numerador:

$$\begin{aligned} (a-1)(a+1)^a - a(a+1)^{a-1} + 1 &= (a^2 - 1)(a+1)^{a-1} - a(a+1)^{a-1} + 1 \\ &= a^2(a+1)^{a-1} - (a+1)^{a-1} - a(a+1)^{a-1} + 1 \\ &= a^2(a+1)^{a-1} - ((a+1)^a - 1). \end{aligned}$$

Basta mostrar que $(a+1)^a - 1$ é divisível por a^2. Usaremos a fatoração (2):

$$(a+1)^a - 1 = (a + 1 - 1)((a+1)^{a-1} + (a+1)^{a-2} + (a+1)^{a-3} + \cdots + (a+1)^2 + (a+1) + 1).$$

O primeiro fator no lado direito da igualdade acima é exatamente a, e o segundo fator é a soma de a termos que deixam resto 1 na divisão por a, logo será também divisível por a. Portanto, o produto será divisível por a^2, como queríamos mostrar.

14. A expressão $1^n + 2^n + \cdots (n-1)^n$ é a soma de $n-1$ termos. Como $n-1$ é par (pois n é ímpar), podemos agrupar em pares os termos da soma que estamos estudando. Faremos isso da seguinte forma:

$$1^n + 2^n + \cdots (n-1)^n = [1^n + (n-1)^n] + [2^n + (n-2)^n] + \cdots + [k^n + (n-k)^n],$$

onde $k = \dfrac{n-1}{2}$. Acabamos de escrever a expressão acima como soma de $\dfrac{n-1}{2}$ termos da forma $[a^n + (n-a)^n]$, onde $a = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$.

Vamos mostrar que cada um dos termos da forma $[a^n + (n-a)^n]$ é divisível por n. Para isso, como n é ímpar, podemos usar a fatoração (1):

$$a^n + (n-a)^n = (a+n-a)(a^{n-1} - a^{n-2}(n-a) + a^{n-3}(n-a)^2 - \cdots + a^2(n-a)^{n-3} - a(n-a)^{n-2} + (n-a)^{n-1}).$$

O primeiro termo da fatoração acima é exatamente n, o que mostra que $a^n + (n-a)^n$ é divisível por n. Como isso vale para todo $a = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$, concluímos a prova.