Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Curso de Aritmética - Nível 1

Prof. Emiliano Chagas

Dígitos e Sistema Decimal - Aula 04

Nesse material vamos trabalhar com dígitos, algarismos e o sistema decimal. Considere por exemplo o número 2373, podemos escreve-lo como:

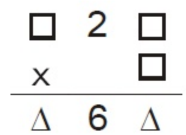
$$2373 = 2000+300+70+3 = 2\times1000+3\times100+7\times10+3 = 2\times10^3+3\times10^2+7\times10^1+3\times10^0$$

Perceba que os dígitos iniciais do número, como 2 milhares, 3 centenas, 7 dezenas e 3 unidades, se localizam na outra representação na frente de potências de 10. Essa representação é fundamental para demonstrar os chamados critérios de divisibilidade. Sem fazer de fato a divisão de um número por 3, por exemplo, é possível saber se o número é divisível por 3. Apresentamos aqui os principais critérios de divisibilidade:

- Por 2 : Basta o algarismo das unidades ser divisível por 2. Exemplo: 294 e 7770 são já que 4 e 0 são divisiveis por 2, por sua vez 45 e 609 não são já que 5 e 9 não são divisiveis por 2.
- Por 3 : A soma dos algarismos deve ser divisível por 3. Exemplo: 492 e 7077 são já que $4+9+2=15$ e $7+0+7+7=21$ são divisiveis por 3, por sua vez 25 e 526 não são já que $2+5=7$ e $5+2+6=13$ não são divisiveis por 3.
- Por 4 : O número formado pelos dois últimos algarismos deve ser divisível por 4. Exemplo: 492 e 5036 são já que 92 e 36 são divisiveis por 4, por sua vez 725 e 5046 não são já que 25 e 46 não são divisiveis por 4.
- Por 5 : Basta o algarismo das unidades ser 0 ou 5, em outras palavras, divisível por 5. Exemplo: 395 e 7770 são já que terminam em 5 e 0, por sua vez 401 e 609 não são já que terminam em 1 e 9.
- Por 6 : O número deve ser divisível simultaneamente por 2 e por 3.
- Por 8 : O número formado pelos três últimos algarismos deve ser divisível por 8. Exemplo: 7496 e 15236 são já que 496 e 236 são divisiveis por 8, por sua vez 1725 e 5046 não são já que 725 e 046 não são divisiveis por 8.
- Por 9 : A soma dos algarismos deve ser divisível por 9. Exemplo: 4392 e 7677 são já que $4+3+9+2=18$ e $7+6+7+7=27$ são divisiveis por 9, por sua vez 25 e 526 não são já que $2+5=7$ e $5+2+6=13$ não são divisiveis por 9.

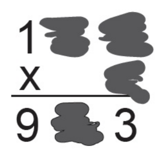
Os problemas dessa lista envolvem escrever números na representação decimal, em somas de potência de 10 ou associar algarismos a letras ou símbolos. Os critérios de divisibilidade podem ajudar muito nesses problemas.

Problema 1. (OBEPM 1^a Fase) Cada um dos símbolos, quadrado e triângulo, representa um único algarismo. Se a multiplicação indicada a seguir está correta, então o valor de quadrado vezes triângulo é:



Solução. Como o resultado da multiplicação é um número de três algarismos, então quadrado só pode representar 1, 2 ou 3. Logo não "vai 1" quando multiplicamos quadrado (multiplicador) por quadrado (algarismo das unidades do multiplicando) e assim quadrado vezes 2 é 6, donde quadrado = 3 e triângulo = 9. Portanto quadrado vezes triângulo é 27.

Problema 2. (OBMEP 1^a Fase) Davi estava fazendo uma conta no caderno quando sua caneta estragou e borrou quatro algarismos, como na figura. Ele se lembra que só havia algarismos ímpares na conta. Qual é a soma dos algarismos manchados?



Solução. Vamos chamar os algarismos borrados de a, b, c e d, como $1ab \times c = 9d3$. Como o algarismo das unidades do resultado é 3, temos quatro possibilidades para b e c, nesta ordem: 1 e 3, 3 e 1, 7 e 9 ou 9 e 7. Como o multiplicando é menor que 200, podemos eliminar as duas primeiras possibilidades, pois um número menor que 200 multiplicado por 1 ou por 3 não passa de 600. Na terceira possibilidade, o multiplicando seria no mínimo 117 e então o produto seria no mínimo $117 \times 9 = 1053$, o que não acontece. Resta a última possibilidade, $1a9 \times 7 = 9d3$. Como $117 \times 7 = 819$, tentamos $139 \times 7 = 973$, que está de acordo com o enunciado. As outras tentativas para o multiplicando, a saber, 157, 177 e 197, não servem, pois ao multiplicá-las por 7 o resultado é sempre maior que 1000. Logo os algarismos manchados são 3, 9, 7 e 7, e sua soma é $3 + 9 + 7 + 7 = 26$.

Problema 3. (OBMEP 1^a Fase) Ana listou todos os números de três algarismos em que um dos algarismos é par e os outros dois são ímpares e diferentes entre si. Beto fez outra lista com todos os números de três algarismos em que um dos algarismos é ímpar e os outros dois são pares e diferentes entre si. Qual é a maior diferença possível entre um número da lista de Ana e um número da lista de Beto?

Solução. Ana fez a seguinte lista: 103, 105, 107, ..., 985, 987, enquanto que a lista de Beto ficou assim: 102, 104, ... 984, 986. A maior diferença possível entre um número da lista de Ana com um número da lista de Beto é $987 - 102 = 885$ (é a diferença entre o maior número da lista de Ana com o menor número da lista de Beto).

1 Problemas

Dígitos e Sistema Decimal: Problemas Introdutórios

Problema 4. No produto a seguir, B é um dígito. Quanto vale B?

$$\begin{array}{r} B2 \\ \times\ 7B \\ \hline 6396 \end{array}$$

Problema 5. Na adição a seguir, o símbolo $\clubsuit$ representa um mesmo algarismo. Qual é o valor de $\clubsuit \times \clubsuit + \clubsuit$?

$$\begin{array}{r} 4\clubsuit 7 \\ +\ 895 \\ \hline 1\clubsuit\clubsuit 2 \end{array}$$

Problema 6. Daniela gosta de brincar com números de dois ou mais algarismos. Ela escolhe um desses números, mutiplica seus algarismos e repete o procedimento, se necessário, até chegar a um número com um único algarismo, que ela chama de número-parada do número escolhido. Por exemplo, o número parada de 32 é 6, pois $32 \to 3 \times 2 = 6$ e o número parada de 236 é 8, pois $236 \to 2 \times 3 \times 6 = 36 \to 3 \times 6 = 18 \to 1 \times 8 = 8$

(a) Qual é o número-parada de 93?

(b) Ache um número de quatro algarismos, sem o algarismo 1, cujo número-parada seja 6.

(c) Quais são os números-parada de dois algarismos cujo número-parada seja 2?

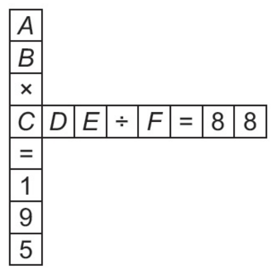
Problema 7. A adição a seguir está incorreta. Entretanto, se substituirmos somente um certo algarismo a, toda vez que ele aparece, por um certo algarismo b, a conta fica correta. Qual é o valor de a^b?

$$\begin{array}{r} 742586 \\ +829430 \\ \hline 1212016 \end{array}$$

Dígitos e Sistema Decimal: Problemas Propostos

Problema 8. O produto de um número de dois algarismos pelo número formado pelos mesmos dois algarismos, escritos em ordem inversa, é 2944. Qual é a soma dos dois números multiplicados?

Problema 9. As contas $AB \times C = 195$ e $CDE \div F = 88$ estão corretas, sendo A, B, C, D, E e F algarismos diferentes. O número AB é formado pelos algarismos A e B, e o número CDE é formado pelos algarismos C, D e E. Qual é o algarismo representado pela letra F?



Problema 10. Determine o maior e o menor número múltiplo de 6 formados por 9 algarismos distintos. Observação: Lembre-se de que zeros a esquerda de um número não devem ser contados como algarismos; por exemplo, 0123 tem somente 3 algarismos.

Problema 11. Joãozinho chama um número natural maior do que 100 de aditivado quando seu algarismo das unidades é igual a soma dos demais algarismos. Por exemplo, 224 é aditivado, pois $2 + 2 = 4$.

(a) Escreva o número aditivado de quatro algarismos cujo algarismo das unidades é 1.

(b) Escreva todos os números aditivados de três algarismos cujo algarismo das unidades é 6.

(c) Qual é o maior número aditivado sem algarismos repetidos?

Problema 12. Para obter o resumo de um número de até 9 algarismos, deve-se escrever quantos são seus algarismos, depois quantos são seus algarismos ímpares e finalmente quantos são seus algarismos pares. Por exemplo, o número 9103405 tem 7 algarismos, sendo 4 ímpares e 3 pares, logo seu resumo é 743.

(a) Encontre um número cujo resumo seja 523.

(b) Encontre um número que seja igual ao seu próprio resumo.

(c) Para qualquer número de até 9 algarismos, podemos calcular o resumo do resumo de seu resumo. Mostre que esse procedimento leva sempre a um mesmo resultado, qualquer que seja o número inicial.

Problema 13. Ao preencher uma ficha de cadastro em um site, Esmeraldinho trocou a dezena com a unidade do ano de seu nascimento. No site ficou registrado que Esmeraldinho tem 51 anos. Ele percebeu imediatamente que invertendo esse número chegava a sua idade correta, 15 anos. E ficou pensando se aquilo era uma coincidência ou se, sempre que alguém comete o mesmo erro, basta inverter as casas decimais para obter a idade correta. Nesse problema vamos ajudar Esmeraldinho a satisfazer a sua curiosidade. Suponha que o ano de nascimento de uma pessoa seja $19AB$ (ou seja, $1900 + 10A + B$) e que ela tenha CD anos completados em 2010 (ou seja, $10C + D$).

(a) Mostre que $110 = 10(A + C) + (B + D)$.

(b) Conclua que caso ela tenha cometido o mesmo erro de Esmeraldinho (trocar dezena com unidade do ano de seu nascimento) e a idade obtida for menor do que 100 anos, então basta inverter as casas decimais para obter a sua idade correta.

Problema 14. Joãozinho tem que fazer uma multiplicação como lição de casa, mas a chuva molhou o caderno dele, borrando alguns algarismos, que estão representados por um quadradinho (cada algarismo borrado pode ser diferente dos outros). Qual é a soma dos algarismos que foram borrados?

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \square & 1 & \square \\
 & & \times & 2 & \square & 3 \\
\hline
 & & \square & \square & 4 & \square \\
 & 4 & \square & 2 & \square & \\
\square & 0 & \square & \square & & \\
\hline
1 & \square & 0 & \square & 0 & 2
\end{array}$$

Problema 15. No código numérico de diversos produtos, como, por exemplo, aquele que aparece no código de barras, utiliza-se o seguinte esquema para detectar erros de digitação: multiplicando-se cada dígito alternadamente por 1 e 3 e adicionando-se os resultados, sempre se obtém um múltiplo de 10. Por exemplo, um possível código de um produto é 4905370265546, pois $4 \times 1 + 9 \times 3 + 0 \times 1 + 5 \times 3 + 3 \times 1 + 7 \times 3 + 0 \times 1 + 2 \times 3 + 6 \times 1 + 5 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times 3 + 6 \times 1 = 120$ é um múltiplo de 10. Por outro lado, 4905370265564 não pode ser o código de um produto pois $4 \times 1 + 9 \times 3 + 0 \times 1 + 5 \times 3 + 3 \times 1 + 7 \times 3 + 0 \times 1 + 2 \times 3 + 6 \times 1 + 5 \times 3 + 5 \times 1 + 6 \times 3 + 4 \times 1 = 124$ não é um múltiplo de 10. Assim, conferindo esta conta, o computador é capaz de detectar erros de digitação.

(a) O último dígito do código de um produto é chamado dígito de verificação. O dígito de verificação que aparece na embalagem de um desodorante está ilegível. Abaixo, ele está indicado por um $\diamond$:

789103304863$\diamond$ Qual é esse dígito?

(b) Como você pode observar nos dois primeiros exemplos, os dois últimos dígitos trocaram de lugar. Esse é um dos erros mais comuns de digitação, a transposição. Mais precisamente, a transposição de dois dígitos consecutivos ocorre quando em vez de se digitar ab digita-se ba, onde a e b representam algarismos distintos.

1. Um corretivo líquido tem código 7897254113302. Mostre que, mesmo que haja uma transposição entre os dígitos 7 e 2, obtemos um possível código de um produto. Ou seja, caso ocorra essa transposição, ela não será detectada.
2. Como vimos no item anterior, o esquema acima é capaz de detectar quase todos os erros de transposição. Determine todos os pares de dígitos consecutivos distintos ab cuja transposição ba não é detectada pelo esquema acima em qualquer código. Observe que, pelo item anterior, 72 é um desses pares.

(c) Quantos códigos de produto são da forma $7897073010xyz$, em que x, y e z são dígitos?

Problema 16. Na adição a seguir de três números de quatro algarismos cada um, as diferentes letras representam diferentes algarismos. Qual é o número ZYX?

$$\begin{array}{r} \mathrm{X\,X\,X\,X} \\ +\ \mathrm{Y\,Y\,Y\,Y} \\ \mathrm{Z\,Z\,Z\,Z} \\ \hline \mathrm{Y\,X\,X\,X\,Z} \end{array}$$

Problema 17. Na multiplicação a seguir a, b, c e d são algarismos. Calcule $b + c + d$.

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ a3 \\ \hline 3bcd \end{array}$$

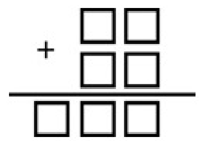
Problema 18. Na multiplicação a seguir, a, b e c são algarismos: Calcule $a + b + c$.

$$\begin{array}{r} 1ab \\ \times\quad b3 \\ \hline *** \\ ***\ \\ \hline 1cc01 \end{array}$$

Problema 19. Na multiplicação a seguir, alguns algarismos, não necessariamente iguais, foram substituídos pelo sinal $*$. Qual é a soma dos valores desses algarismos?

Problema 20. Paulo quer usar uma única vez os algarismos 0, 1, 2, 3, 5, 6 e 7, um para cada um dos quadradinhos a seguir, de modo que a conta esteja correta. Qual é o maior resultado que ele pode obter nessa conta?

Problema 21. Esmeralda ia multiplicar um número A de três algarismos por outro número B de dois algarismos, mas na hora de multiplicar inverteu a ordem dos dígitos de B e obteve um resultado 2034 unidades maior.



(a) Qual era o número A, se os dígitos de B eram consecutivos?

(b) Qual seria o número A, se os dígitos de B não fossem consecutivos?

Dígitos e Sistema Decimal: Soluções dos Introdutórios

4) (EUA 1^a Fase) Veja que o primeiro produto, $2 \times B$ nos dá um número cujo dígito das unidades é 6, portanto tudo que devemos fazer é ver quais são os valores de B para que isso ocorra. Esses valores são $B = 3$, pois $2 \times 3 = 6$ ou $B = 8$, pois $2 \times 8 = 16$. Agora é só testarmos para ver qual deles funciona, e isso ocorre com $B = 8$.

5) (OBMEP 1^a Fase) Na conta apresentada podemos observar o seguinte:

   Coluna das unidades: como $7 + 5 = 12$, vai 1 para a coluna das dezenas;

   Coluna das dezenas: como $1 + \clubsuit + 9 = 10 + \clubsuit$, o algarismo das dezenas do resultado é $\clubsuit$ e vai 1 para a coluna das centenas;

   Coluna das centenas: como $1 + 4 + 8 = 13$, o algarismo das centenas da soma é 3 e vai 1 para a coluna dos milhares.

   Em resumo, concluímos que $1\clubsuit\clubsuit2 = 13\clubsuit2$, o que nos mostra que $\clubsuit = 3$ (e a conta é $437 + 895 = 1332$). Logo $\clubsuit \times \clubsuit + \clubsuit = 3 \times 3 + 3 = 12$.

6) (OBMEP 2^a Fase)

   (a) O número-parada de 93 é 4, pois $93 \to 9 \times 3 = 27 \to 2 \times 7 = 14 \to 1 \times 4 = 4$

   (b) Escrevendo $3 \times 2 = 6$ vemos que $32 \to 3 \times 2 = 6$. Como $32 = 4 \times 2 \times 2 \times 2$, temos $4222 \to 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \to 3 \times 2 = 6$. Assim o número-parada de 4222 é 6, bem como de 2422, 2242 e 2224.

   Outra alternativa é escrever $1 \times 6 = 6$, o que nos dá $16 \to 1 \times 6 = 6$; como $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ segue que $2222 \to 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \to 1 \times 6 = 6$ e vemos que o número-parada de 2222 também é 6. Pode-se também pensar a partir $48 \to 4 \times 8 = 32$ e temos um caso anterior.

   (c) Há apenas duas maneiras de obter 2 multiplicando dois algarismos, a saber, $12 \to 1 \times 2 = 2$ e $21 \to 2 \times 1 = 2$. Para obter 12, temos as possibilidades , $26 \to 2 \times 6 = 12$, $62 \to 6 \times 2 = 12$, $34 \to 3 \times 4 = 12$ e $43 \to 4 \times 3 = 12$; para obter 21, temos as possibilidades $37 \to 3 \times 7 = 21$ e $73 \to 7 \times 3 = 21$. Como os números 21, 26, 62, 34, 43, 37 e 73 não podem ser obtidos como produto de dois algarismos, concluímos que os números de dois algarismos cujo número-parada é 2 são 12, 21, 26, 62, 34, 43, 37 e 73.

7) (OBM 2^a Fase) Na primeira inspeção, podemos admitir que os três algarismos na direita de todos os números estão corretos, isto é, estão corretamente escritos os algarismos 0, 1, 3, 4, 5, 6 e 8. Portanto, dentre os algarismos 2, 7 e 9, um deles está escrito incorretamente. O 9 está escrito corretamente, pois se o mudarmos, a soma com 2 não estará certa. Logo ou 2 ou 7 está errado. Se o 7 estiver errado, então 2 estará correto, mas isso não é possível pois a soma de 2 com 4 mais 1 não estaria certa. Logo, o 2 é que deve ser substituído; olhando novamente a soma de 2 com 4 mais 1 resultando 1 vemos que o resultado só dará certo se no lugar de 2 colocarmos 6. Fazendo a substituição, verificamos que o resto se encaixa. Teremos, então, $a^b = 2^6 = 64$.

Dígitos e Sistema Decimal: Soluções dos Propostos

8) (OBMEP 1^a Fase) Fatorando o número 2944 temos: $2944 = 2^7 \times 23 = 128 \times 23 = 64 \times 2 \times 23 = 64 \times 46$. Como este último produto satisfaz as condições do enunciado, e também é o único nas condições descritas, temos que a soma desses dois números é $64 + 46 = 110$.

9) (OBMEP 1^a Fase) Primeiramente, decompomos 195 em fatores primos e obtemos: $195 = 3 \times 5 \times 13$. Só há, então, duas possibilidades para o algarismo C: ou $C = 3$ ou $C = 5$. Se $C = 3$, então $AB = 65$, donde $A = 6$ e $B = 5$. Como $CDE \div F = 88$, temos que $3DE = 88 \times F$. A única possibilidade é $F = 4$, pois outros valores, quando multiplicados por 88 não produzem números entre 300 e 399. Assim, $F = 4$ e então $D = 5$ e $E = 2$, pois $352 = 4 \times 88$. Esta solução não serve porque $B = D = 5$ e o enunciado diz que os algarismos devem ser diferentes. Logo $C = 5$, $A = 3$ e $B = 9$, pois $39 \times 5 = 195$. Como $5DE = F \times 88$, vemos que $F = 6$, já que $6 \times 88 = 528$ e não há outra possibilidade de se obter cinco centenas multiplicando-se um número de um só algarismo por 88. Portanto, $D = 2$ e $E = 8$.

10) (OPM Fase Inicial) Para que um número seja múltiplo de 6 ele deve ser:

- par, ou seja, o seu algarismo das unidades deve ser 0, 2, 4, 6 ou 8;
- múltiplo de 3, ou seja, a soma de seus algarismos deve ser múltiplo de 3. Como o número deve ter 9 algarismos distintos, este deve conter em sua representação decimal todos os algarismos exceto um algarismo. Como $0+1+2+3+\ldots+9 = 45$, para que a soma dos algarismos do número seja múltiplo de 3, o algarismo a ser excluído também deve ser múltiplo de 3, ou seja, deve ser 0, 3, 6 ou 9.

Para obter o maior número possível excluímos o zero e tomamos um número terminado em 2: 987654312.

Para obter o menor número possível excluímos o nove e tomamos um número terminado em 8: 102345678.

11) (OBMEP 2^a Fase)

(a) Como o algarismo das unidades é 1, para que o número seja aditivado, a soma dos algarismos das casas das dezenas, centenas e unidades de milhar deve ser igual a 1. Existe só um número com quatro algarismos com essas propriedades: 1001.

(b) Para que um número aditivado de três algarismos termine em 6, a soma do algarismo das dezenas com o das centenas deve ser igual a 6. Como um tal número não pode ter 0 na casa das centenas, há exatamente seis possibilidades: 156, 246, 336, 426, 516 e 606.

(c) Quanto mais algarismos tem um número, maior ele é. Assim, para conseguirmos o maior número aditivado possível, devemos ter 9 na sua casa das unidades, a fim de gerar um número com a maior quantidade possível de algarismos. Na casa das dezenas podemos colocar o algarismo 0, a fim de aumentar a quantidade de algarismos do número que estamos procurando. Como não queremos algarismos repetidos, pelo mesmo motivo, na casa das centenas devemos colocar o algarismo 1 e, na casa das unidades de milhar, o algarismo 2. Para a casa das dezenas de milhar podemos colocar os seguintes algarismos ainda não utilizados: 3, 4, 5, 6, 7 ou 8. Entretanto, os algarismos 7 e 8 estão excluídos pois 72109 e 82109 não são aditivados. Restam quatro possibilidades: _32109, _42109, _52109 e 62109 (o traço indica onde deve ser colocado o algarismo das centenas de milhar).

Nenhuma das três primeiras possibilidades pode ocorrer, pois, para o número ser aditivado, em cada caso, o algarismo que deveria ser colocado no lugar do traço já foi utilizado antes e repetições não são permitidas. Logo o maior número aditivado sem algarismos repetidos é 62109.

12) (OBMEP 2^a Fase) No que segue, por "número" queremos dizer "número de até nove algarismos".

(a) Consideremos um número cujo resumo seja 523. Então ele tem cinco dígitos, dos quais dois são ímpares e três são pares. Podemos formar muitos números satisfazendo estas condições; alguns exemplos são 11222, 23456 e 36854.

(b) Como o resumo de qualquer número tem três algarismos, vemos que para que um número seja igual ao seu próprio resumo é necessário que ele tenha três algarismos. Suponhamos então que exista um número que seja seu próprio resumo, e sejam c seu algarismo das centenas, d o das dezenas e u o das unidades.

Como o algarismo das centenas do resumo de um número de três algarismos é 3, devemos ter $c = 3$. Somando os algarismos das dezenas e das unidades do resumo devemos obter o número de algarismos do número original, ou seja, $d + u = 3$. Logo as possibilidades para o resumo de um resumo são 303, 312, 321 ou 330; destes, o único que é seu próprio resumo é o 321, que é então o número procurado.

(c) O resumo de um número tem sempre três algarismos. Como vimos no item b, as possibilidades para o resumo de um número de três algarismos são 303, 312, 321 ou 330; logo as possibilidades para o resumo do resumo de qualquer número estão entre estas quatro. Os resumos de 303, 312, 321 ou 330 são todos iguais a 321. Como 321 tem como resumo ele mesmo, sempre chegaremos a ele quando calculamos sucessivas vezes o resumo de um número. Mais precisamente, para qualquer número inicial, o resumo do resumo de seu resumo é 321. Podemos visualizar este raciocínio no diagrama abaixo.

número $\rightarrow$ número de três algarismos $\rightarrow$ 303, 312, 321 ou 330 $\rightarrow$ 321

Observação: notamos que o resumo do resumo de qualquer número só pode ser 303 ou 321. De fato, da primeira vez que calculamos o resumo de algum número obtemos um número de três dígitos cdu, com $d + u = c$. Temos então dois casos:

c é par: neste caso d e u são ambos pares ou ambos ímpares. Se d e u são pares, o próximo resumo será 303; se d e u são ímpares, o próximo resumo será 321.

c é ímpar: neste caso d é par e u é ímpar, ou d é ímpar e u é par. Se d é par e u é ímpar, o próximo resumo será 321; Se d é ímpar e u é par, o próximo resumo será 321.

13) (OPM Fase Inicial)

   (a) Sabemos que o ano de nascimento somado a idade resulta em 2010. Então, $(1900+10A+B)+(10C+D)=2010$, o que é equivalente a $10(A+C)+(B+D)=110$.

   (b) Como $110=10(A+C)+(B+D)$, $B+D=10(11-(A+C))$ é múltiplo de 10. Como B e D são dígitos, $B+D$ é no mínimo 0 e no máximo 18. Logo $B+D=0$ ou $B+D=10$. Se $B+D=0$, então $B=D=0$ e $A+C=11$. Nesse caso, o ano de nascimento digitado errado seria $190A$, e a pessoa teria $2010-190A=110-A>100$ anos, o que não é o caso. Se $B+D=10$, então $A+C=10$ também, ou seja, $C=10-A$ e $D=10-B$. Trocar dezena com unidade do ano de seu nascimento é o mesmo que trocar A com B. Mas as equações acima implicam que C e D também seriam trocados de lugar.

14) (OBM 2^a Fase) Como o algarismo das unidades do produto é 2, o algarismo das unidades do multiplicando é 4. Assim, obtemos o algarismo da direita da 3^a linha do algoritmo e também os dois últimos algarismos da 5^a linha. Como o algarismo das dezenas do produto é 0, o algarismo da direita na 4^a linha do algoritmo deve ser 6. Logo o algarismo das dezenas do multiplicador é 9. Como o 2^o algarismo a direita da 5^a linha é 0, o algarismo das centenas do multiplicando é 5. A partir do algoritmo completo, concluímos que a soma dos algarismos que foram borrados é $5+4+9+1+5+2+6+6+1+2+8+5+6=60$.

15) (OPM Fase Final)

   (a) Temos $7\times1+8\times3+9\times1+1\times3+0\times1+3\times3+3\times1+0\times3+4\times1+8\times3+6\times1+3\times3+\diamond\times1=7+24+9+3+0+9+3+0+4+24+6+9+\diamond=98+\diamond$ Como $\diamond$ representa um dígito, $98+\diamond$ será múltiplo de 10 se, e somente se, $\diamond$ for 2, ou seja, o dígito de verificação é 2.

   (b) (1) Inicialmente, vamos verificar o código 7897254113302. Temos $7\times1+8\times3+9\times1+7\times3+2\times1+5\times3+4\times1+1\times3+1\times1+3\times3+3\times1+0\times3+2\times1=7+24+9+21+2+15+4+3+1+9+3+0+2=100$, que é um múltiplo de 10. Vamos agora verificar o código 7892754113302 que sofreu a transposição. Temos $7\times1+8\times3+9\times1+2\times3+7\times1+5\times3+4\times1+1\times3+1\times1+3\times3+3\times1+0\times3+2\times1=7+24+9+6+7+15+4+3+1+9+3+0+2=90$, que também é múltiplo de 10.

   (2) A transposição não é detectada quando os resultados de $b\times1+a\times3=3a+b$ e $a\times1+b\times3=a+3b$ têm o mesmo algarismo das unidades, ou seja, deixam o mesmo resto quando divididos por 10. Como $3a+b$ e $a+3b$ deixam o mesmo resto quando divididos por 10, a diferença entre eles é um múltiplo de 10, ou seja, $(3a+b)-(a+3b)=2a-2b$ é um múltiplo de 10. Sendo a e b dígitos, os possíveis pares de dígitos consecutivos distintos ab cuja transposição ba não é detectada pelo esquema apresentado são 50, 05, 61, 16, 72, 27, 83, 38, 94 e 49.

(c) Uma vez que estejam estabelecidos os valores de x e y no código $7897073010xyz$, podemos determinar o valor de z para atender ao esquema de conferência, como, por exemplo, no item a. Assim, basta estabelecer o par xy para criar o código; o z vem "automaticamente". Como temos 10 possibilidades para o x e 10 para o y, podemos determinar o par xy de $10 \times 10 = 100$. Logo há 100 códigos de produto que são da forma $7897073010xyz$.

16) (OBM 2^a Fase) Os números somados são $XXXX = 1000X+100X+10X+X = 1111X$, $YYYY = 1111Y$ e $ZZZZ = 1111Z$, e o resultado da soma é $YXXXZ = 10000Y + 1110X + Z$. Logo $1111X + 1111Y + 1111Z = 10000Y + 1110X + Z \Leftrightarrow 8889Y = 1110Z + X = ZZZX$. O número $ZZZX$ tem quatro algarismos, logo Y só pode ser igual a 1, $Z = 8$ e $X = 9$. Assim $ZYX = 819$.

17) (OBM 2^a Fase) Vamos fazer uma cota, já que $45 \times a3$ deve ser três mil e alguma coisa. Quanto pode valer a? Vamos ver quando $45 \times a3 = 3000$ e quando $45 \times a3 = 3999$. A primeira conta nos dá $a3 \approx 67$ e a segunda $a3 \approx 89$. Isso significa que $a3$ está entre 67 e 89, mas como o algarismo das unidades é 3, temos que $a3$ pode ser 73 ou 83. Colocando $a = 7$ ou $a = 8$ temos a mesma soma $b+c+d$, já que $45 \times 73 = 3285$ e $45 \times 83 = 3735$, a soma dos algarismos pedidos é 15 de qualquer maneira.

18) (OBM 2^a Fase) Veja que $b \times 3$ deve terminar em 1. O único caso possível é $b = 7$, logo temos que $1a7 \times 73 = 1cc01$. Testamos agora valores para a. O menor valor que a pode assumir é 3, já com esse valor temos que $137 \times 73 = 10001$.

19) (OBM 1^a Fase) Analisamos $abc \times d7 = 6157$, além disso na conta de multiplicação os termos intermediários (que possuem asterisco) que se somam tem 3 algarismos. Segue automaticamente que $c = 1$ e $a = 1$. Se a fosse maior que 1, a conta $7 \times a$ teria dois algarismos e isso provocaria um número com 4 asteriscos. Veja que b não pode ser grande também, já que $7 \times 1b1$ tem que ter 3 algarismos. Fazemos a conta para descobrirmos que b pode ser 0, 1, 2, 3 ou 4. Uma maneira de terminar o problema nesse instante é perceber que 101, 111, 121, 131 ou 141 devem dividir o número 6157. Fazemos as contas para descobrir que 131 é o número, portanto temos que $131 \times 47 = 6157$, ai é só fazer a conta dos asteriscos.

20) (OBM 2^a Fase) Veja que o maior resultado dessa conta acontece quando pegamos o maior par de números possíveis nas dezenas dos números somados. Além disso, devemos ter um "vai um", pois o resultado possui 3 dígitos. Assim, considere os maiores pares em ordem decrescente:

Caso 7 e 6: no resultado teríamos nas centenas e dezenas 13 ou 14 (havendo vai um das unidades), mas como não temos 4, então teria que ser 13. Aí sobram apenas 0,2 e 5 para completar a conta, o que não é possível.

Caso 7 e 5: no resultado teríamos nas centenas e dezenas 12 ou 13. Restaria nas unidades 0,3,6 ou 0,2,6. E nos dois casos não é possível completar a expressão.

Caso 5 e 6: no resultado teríamos nas centenas e dezenas 11 ou 12. Como só temos um dígito 1, teria que ser o 12, sobrando 0,3 e 7 que permite completar a expressão, que seria: $67 + 53 = 120$ ou $63 + 57 = 120$. Note que se pegarmos uma combinação menor das dezenas teremos soma máxima 10 ou 11, com um "vai um", geraria números menores que 120.

21) (OBM 2^a Fase) Seja A o número de três dígitos e $B = 10x + y$ o número de dois dígitos. Portanto, ao trocar a ordem dos dígitos de B, obtemos o número $10y + x$. Montando a equação segundo as condições do problema, temos:

$$A(10x + y) - A(10y + x) = 9A(x - y) = 2034$$

Com isso,

$$A(x - y) = 226 = 2 \times 113$$

Daí, se x e y são consecutivos, $A = 226$, caso contrário $A = 113$.