Problemas Resolvidos

Nível 2

Trabalhando com ângulos

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problema 1. (Torneio das Cidades 1994) No triângulo ABC, retângulo em C, os pontos M e N são escolhidos sobre a hipotenusa de modo que $BN = BC$ e $AM = AC$. Ache a medida do ângulo $\angle NCM$.

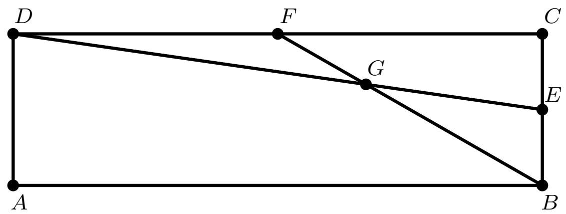
Problema 2. Seja $ABCDEF$ um hexágono com todos os ângulos internos iguais a $120°$. Mostre que

$$AB - DE = CD - AF = EF - BC.$$

Problema 3. Seja $RSTUV$ pentágono regular. Construa um triangulo equilátero PRS com P no interior do pentágono. Ache a medida do ângulo $\angle PTV$.

Problema 4. No trapézio $ABCD$, de bases AB e CD, temos $AD = 39$, $CD = 14$, $\angle ABC = 69°$ e $\angle CDA = 138°$. Ache a medida de AB.

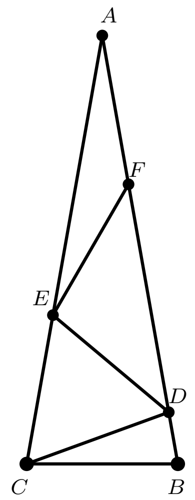
Problema 5. (OBM) No retângulo $ABCD$, E é o ponto médio do lado BC e F é o ponto médio do lado CD. A interseção de DE com FB é G. O ângulo $\angle EAF$ mede $20°$. Quanto vale o ângulo $\angle EGB$?



Problema 6. $DEFG$ é um quadrado no exterior do pentágono regular $ABCDE$. Quanto mede o ângulo $\angle EAF$?

Problema 7. No triângulo ABC, D e E são pontos sobre os lados BC e AC respectivamente. Determine $\angle CDE$ sabendo que $AB = AC$, $AE = AD$ e $\angle BAD = 48°$.

Problema 8. Determine $\angle BAC$ na figura abaixo sabendo que $AB = AC$ e $BC = CD = DE = EF = FA$.



Problema 9. No triângulo ABC com $AB = BC$, $\angle ABC = 144°$. Seja K um ponto em AB, L um ponto em BC e M em AC de modo que $KL \parallel AC$, $KM \parallel BC$ e $KL = KM$. A reta LM corta o prolongamento de AB em P. Ache a medida do ângulo $\angle BPL$.

Problema 10. No triângulo ABC com $AB = BC$, P, Q e R são pontos nos lados AC, BC e AB, respectivamente tais que $PQ \parallel AB$, $RP \parallel BC$ e $RB = AP$. Se $\angle AQB = 105°$, ache as medidas dos ângulos do $\triangle ABC$.

Problema 11. BE e AD são as alturas do triângulo ABC, H é o ortocentro e F, G, K são os pontos médios dos segmentos AH, AB, BC, respectivamente. Prove que $\angle FGK$ é reto.

Problema 12. Em um triângulo ABC temos que $\angle ABC = 37°$ e $\angle ACB = 38°$. Sejam P e Q pontos sobre o lado BC tais que $\angle BAP = \angle PAQ = \angle QAC$. Se traça por B uma paralela a AP e por C uma paralela a AQ. O ponto de encontro destas duas retas é D. Calcule $\angle BDC$.

Problema 13. (Maio 1996) Seja $ABCD$ um quadrado e F um ponto qualquer do lado BC. Traça-se por B a perpendicular à reta DF que corta a reta DC em Q. Quanto mede o ângulo $\angle FQC$?

Soluções

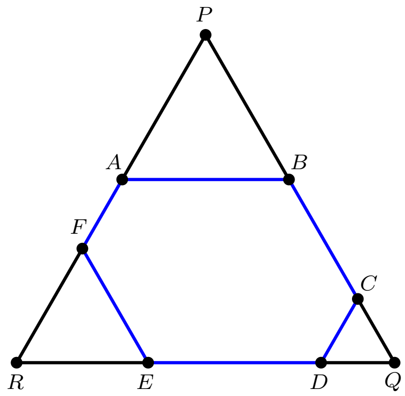
1. Digamos que $\alpha = \angle BAC$ e $\beta = \angle ABC$. Como o $\triangle ABC$ é retângulo, temos que $\alpha + \beta = 90°$.

Como o $\triangle ACM$ é isósceles com base CM, temos que $\angle ACM = \angle AMC = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Da mesma forma, como o $\triangle BCN$ é isósceles com base CN, temos que $\angle BCN = \angle BNC = 90° - \frac{\beta}{2}$.

Considerando a soma dos ângulos internos do $\triangle CMN$, temos

$$\angle NCM = 180° - (\angle CMN + \angle CNM) = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°.$$

2. Prolongamos os lados AF e BC do hexágono até se encontrarem num ponto P, da mesma maneira as retas BC e DE se encontram no ponto Q e as retas ED e AF se encontram no ponto R.



Note que $\angle PAB = 180° - \angle BAF = 180° - 120° = 60°$. Analogamente, $\angle PBA = \angle QCD = \angle QDC = \angle REF = \angle RFE = 60°$.

Assim, como os ângulos internos dos triângulos $\triangle PAB$, $\triangle QCD$ e $\triangle REF$ são todos iguais a $60°$, estes triângulos são equiláteros. Além disso, o $\triangle PQR$ também é equilátero.

Chamemos de a, b, c e ℓ, o comprimento dos lados dos triângulos $\triangle PAB$, $\triangle QCD$, $\triangle REF$ e $\triangle PQR$, respectivamente.

Veja que $DE = RQ - RE - DQ = \ell - b - c$, logo

$$AB - DE = a - (\ell - b - c) = a + b + c - \ell.$$

Usando exatamente o mesmo argumento, teremos que

$$CD - AF = b - (\ell - a - c) = a + b + c - \ell$$

e que

$$EF - BC = c - (\ell - a - b) = a + b + c - \ell.$$

3. Os ângulos internos de um pentágono regular são todos iguais a $108°$. Logo $\angle PST = 108° - \angle RSP = 108° - 60° = 48°$. Veja agora que o $\triangle PST$ é isósceles com $PS = ST$, logo considerando a soma dos ângulos internos desse triângulo, concluímos que $\angle SPT = \angle STP = 66°$. Analogamente, teremos que o $\triangle RVP$ também é isósceles, e os seus ângulos internos medem $\angle VRP = 48°$, $\angle RVP = \angle RPV = 66°$.

Observe que os triângulos $\triangle RVP$ e $\triangle SPT$ são congruentes (podemos usar o critério l.a.l., com $\angle VRP = \angle PST = 48°$ e $RV = RP = SP = ST$). Consequentemente, teremos que $VP = PT$, o que implica que $\triangle VPT$ é isósceles. Agora veja que $\angle VPT = 360° - \angle VPR - \angle RPS - \angle SPT = 360° - 66° - 60° - 66° = 168°$. Logo, considerando a soma dos ângulos internos do $\triangle VPT$ temos que

$$\angle PTV = \angle PVT = \frac{180° - 168°}{2} = 6°.$$

4. Seja E o ponto de interseção das retas AD e BC, conforme mostra a figura. Note que $\angle EDC = 180° - \angle ADC = 180° - 138° = 42°$, e que $\angle DCE = \angle ABE = 69°$ (por serem correspondentes)

No $\triangle CDE$, temos

$$\angle DEC = 180° - \angle EDC - \angle ECD = 180° - 42° - 69° = 69°,$$

o que implica que $\triangle CDE$ é isósceles com $DE = DC = 14$.

Como o $\triangle ABE$ também tem dois ângulos iguais (a $69°$), temos que ele também é isósceles com base $AB = AE = AD + DE = 39 + 14 = 53$.

5. Pelo critério de l.a.l. temos que os triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle DCE$ são congruentes ($AB = CD$, $BE = EC$ e $\angle ABE = \angle DCE = 90°$), logo, consequentemente teremos que $\angle BAE = \angle CDE$. Analogamente teremos que os triângulos $\triangle ADF$ e $\triangle BCF$ são congruentes ($AD = BC$, $DF = FC$ e $\angle ADF = \angle BCF = 90°$), o que implica que $\angle DAF = \angle CBF$.

Note que

$$\angle CDE + \angle CBF = \angle ABE + \angle DAF = \angle BAD - \angle EAF = 90° - 20° = 70°.$$

Considerando a soma dos ângulos internos do $\triangle BCD$, temos

$$\angle GBD + \angle GDB = 180° - \angle BCD - (\angle CDE + \angle CBF) = 180° - 90° - 70° = 20°.$$

Como $\angle BGE$ é ângulo externo do $\triangle BDG$, temos

$$\angle BGE = \angle GBD + \angle GDB = 20°.$$

6. Os ângulos internos de um pentágono regular são todos iguais a $108°$. Veja que

$$\angle AEF = 360° - \angle AED - \angle DEF = 360° - 108° - 90° = 162°.$$

Como $ABCDE$ é um pentágono regular e $DEFG$ um quadrado, temos que $AE = ED = EF$. Portanto $\triangle AEF$ é isósceles com base AF. Então

$$\angle EAF = \angle EFA = \frac{180° - \angle AEF}{2} = \frac{180° - 162°}{2} = 9°.$$

7. Digamos que o $\angle CAD$ mede α. Como $\triangle ABC$ é isósceles com base BC, temos que

$$\angle ACB = \angle ABC = \frac{180° - \angle BAC}{2} = \frac{180° - (48° + \alpha)}{2} = 66° - \frac{\alpha}{2}.$$

Como $\triangle ADE$ é isósceles com base DE, temos

$$\angle AED = \angle ADE = \frac{180° - \angle DAE}{2} = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Veja agora que $\angle CED = 180° - \angle AED = 180° - (90° - \frac{\alpha}{2}) = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Considerando a soma dos ângulo interno do $\triangle CDE$, temos

$$\angle CDE = 180° - (\angle CED + \angle ECD) = 180° - (90° + \frac{\alpha}{2} + 66° - \frac{\alpha}{2}) = 180° - (90° + 66°) = 24°.$$

8. Chamemos de α a medida do $\angle BAC$. Como $\triangle AEF$ é isósceles com base AE, temos que $\angle AEF = \angle EAF = \alpha$.

Como $\angle DFE$ é ângulo exterior ao $\triangle AEF$, temos $\angle DFE = \angle AEF + \angle EAF = 2\alpha$. Veja que $\triangle DEF$ é isósceles com base DF, logo $\angle FDE = \angle DFE = 2\alpha$.

Como $\angle CED$ é ângulo exterior ao $\triangle ADE$, temos $\angle CED = \angle EAD + \angle EDA = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$. Também, como o $\triangle CDE$ é isósceles com base CE, temos $\angle ECD = \angle CED = 3\alpha$.

Como $\angle BDC$ é ângulo exterior ao $\triangle ACD$, temos $\angle BDC = \angle CAD + \angle ACD = \alpha + 3\alpha = 4\alpha$. Além disso, como o $\triangle BCD$ é isósceles com base BD, temos que $\angle CBD = \angle CDB = 4\alpha$.

Por outro lado, como o $\triangle ABC$ é isósceles com base BC, temos que $\angle ABC = \angle ACB = 4\alpha$.

Finalmente, considerando a soma dos ângulos internos do $\triangle ABC$, temos que $\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180°$, ou seja $9\alpha = 180°$. Donde concluímos que $\alpha = 20°$.

9. Como $\triangle ABC$ é isósceles e $\angle ABC = 144°$, temos que $\angle BAC = \angle BCA = 18°$. Como $KL \parallel AC$, $\angle BKL = \angle BAC = 18°$.

Veja também que $CLKM$ é um paralelogramo (os lados opostos são paralelos), logo $\angle LKM = \angle LCM = 18°$. Como $\triangle KLM$ é isósceles, temos que $\angle KML = \angle KLM = 81°$. Logo

$$\angle KPM = 180° - \angle PKM - \angle PMK = 180° - 36° - 81° = 63°.$$

10. Denotemos por $\alpha = \angle ABC$ e $\beta = \angle BAQ$. Veja que

$$\alpha + \beta = 180° - \angle AQB = 180° - 105° = 75°. \tag{1}$$

Como $PQ \parallel AB$ e $RP \parallel BC$, temos que $\angle AQP = \angle BAQ = \beta$ e que $BQPR$ é um paralelogramo. Logo $RB = PQ$. Como é dado que $RB = AP$, temos que $AP = PQ$ e, portanto, $\triangle APQ$ é isósceles com base AQ. Consequentemente, $\angle PAQ = \angle AQP = \beta$.

Assim, teremos que $\angle BAC = \angle BAQ + \angle PAQ = 2\beta$ e, como $\triangle ABC$ é isósceles, temos que $\angle BCA = 2\beta$. Considerando a soma dos ângulos internos do $\triangle ABC$, temos

$$\alpha + 4\beta = 180°. \tag{2}$$

Resolvendo o sistema de equações composto pelas equações (1) e (2), obtemos que $\alpha = 40°$ e $\beta = 35°$. Donde obtemos os ângulos do $\triangle ABC$: $\angle ABC = \alpha = 40°$ e $\angle BAC = \angle BCA = 2\beta = 70°$.

11. Note que GK e FG são bases médias dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABH$, respectivamente. Logo $GK \parallel AC$ e $FG \parallel BH$.

Seja I a interseção de AC com o prolongamento de GF e seja J a interseção de GK com BE. Note que no quadrilátero $GIEJ$ os lados opostos são paralelos e que $\angle IEJ = 90°$, o que implica que $GIEJ$ é um retângulo. Assim $\angle FGK = IGJ = 90°$.

12. Note que $\angle BAC = 180° - 37° - 38° = 105°$, logo $\angle BAP = \angle PAQ = \angle QAC = \frac{105°}{3} = 35°$.

Como $BD \parallel AP$ e $CD \parallel AQ$, temos que $\angle CBD = \angle QPA$ e $\angle BCD = \angle PQA$ (por serem correspondentes). Logo

$$\angle BDC = 180° - (\angle CBD + \angle BCD) = 180° - (\angle QPA + \angle PQA) = \angle PAQ = 35°.$$

13. Note que F é o ortocentro do $\triangle BDQ$, logo o prolongamento de QF corta perpendicularmente BD, chamemos de E esse ponto de interseção. Como BD é diagonal do quadrado $ABCD$, temos que $\angle BDC = 45°$. Veja que

$$\angle FQC = \angle DQE = 180° - \angle DEQ - \angle EDQ = 180° - 90° - 45° = 45°.$$

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández