

## Teorema de Pitágoras

O objetivo desse capítulo é o de demonstrar e aplicar um dos teoremas mais importantes da matemática: o teorema de Pitágoras.

**Teorema de Pitágoras.** Seja  $ABC$  um triângulo retângulo em  $C$ . Então,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2.$$

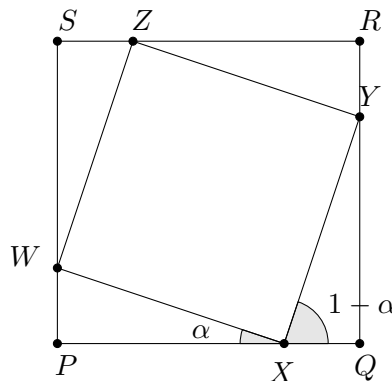


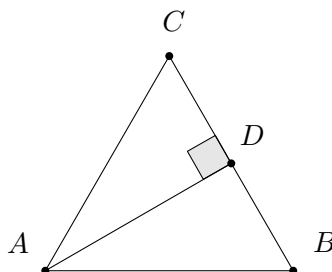
Figura 1: Demonstração do Teorema de Pitágoras

*Demonstração.* Sejam  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $CA = b$  as medidas dos lados do triângulo  $ABC$ , retângulo em  $C$ . Construa um quadrado  $PQRS$  de lado  $a + b$  e considere pontos sobre os lados deste quadrado de modo que  $PX = QY = RZ = SW = a$  como ilustrado na figura (1). Dessa forma, os triângulos  $PXW$ ,  $QYX$ ,  $RZY$  e  $SWZ$  são todos congruentes ao triângulo  $ABC$ . Portanto, os lados do quadrilátero  $XYZW$  são iguais a  $c$ . Além disso, a soma dos ângulos  $\angle WXP$  e  $\angle YXQ$  é igual a  $90^\circ$ . De modo análogo, podemos concluir que os demais ângulos do quadrilátero  $XYZW$  são todos retos. Logo,  $XYZW$  é um quadrado. Agora, observe que a área do quadrado  $PQRS$  é igual à soma da área do quadrado  $XYZW$  com as áreas dos triângulos  $PXW$ ,  $QYX$ ,  $RZY$  e  $SWZ$ . Daí, temos a seguinte equação:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

**Fato Importante:** Seja  $ABC$  um triângulo equilátero tal que  $AB = BC = CA = \ell$ . Então,

$$[ABC] = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}.$$



*Demonstração.* Seja  $D$  o pé da altura relativa ao vértice  $A$ . Como  $ABC$  é equilátero,  $D$  é ponto médio de  $BC$ . Seja  $AD = h$  a medida da altura. Aplicando o teorema de Pitágoras no  $\triangle ADC$ , temos

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}.$$

Logo,  $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ . Portanto,  $[ABC] = \frac{h \times \ell}{2} = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$ .

**Observação:** Para resolver alguns dos problemas a seguir, talvez seja útil conhecer os seguintes produtos notáveis:

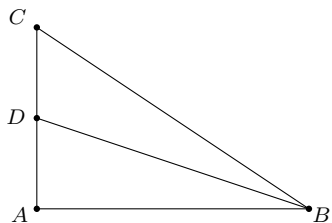
(i)  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;

(ii)  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ;

(iii)  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ .

**Problema 1.** (OBM 2013 - 1ª Fase) Seja  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$ . Seja  $D$  o ponto médio de  $AC$ . Sabendo que  $BD = 3DC$  e que  $AC = 2$ , quanto mede a hipotenusa do triângulo?

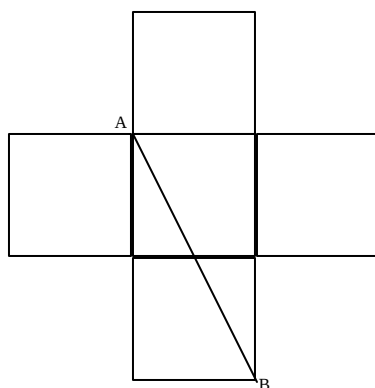
**Solução.**



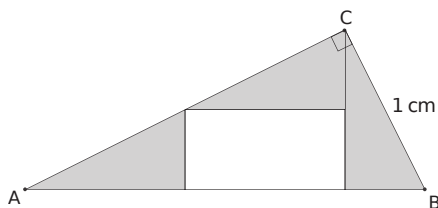
Como  $AC = 2$ , temos que  $AD = DC = 1$ . Pelo teorema de Pitágoras no triângulo  $DAB$ , temos  $AB^2 = 3^2 - 1^2 = 8$ . Novamente pelo Teorema de Pitágoras, agora no triângulo  $ABC$ , temos:  $BC^2 = 2^2 + AB^2 = 12 \Leftrightarrow BC = \sqrt{12}$ .

## Problemas Introdutórios

**Problema 2.** (OBM 2007 - 1ª Fase) O jardim da casa de Maria é formado por cinco quadrados de igual área e tem a forma da figura abaixo. Se  $AB = 10$  m, então qual é a área do jardim em metros quadrados?



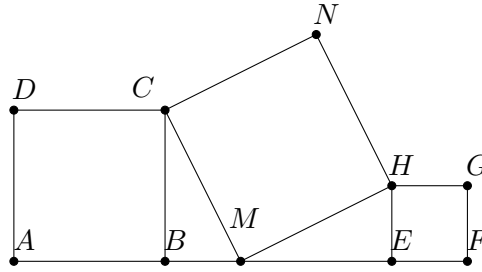
**Problema 3.** (OBMEP 2007 - 1ª Fase) A figura mostra um triângulo retângulo  $ABC$  e três triângulos retângulos congruentes sombreados. O lado  $BC$  tem comprimento 1 cm. Qual é o perímetro do triângulo  $ABC$ , em centímetros?



**Problema 4.** (OBM 2004 - 1ª Fase) No triângulo  $PQR$ , a altura  $PF$  divide o lado  $QR$  em dois segmentos de medidas  $QF = 9$  e  $RF = 5$ . Se  $PR = 13$ , qual é a medida de  $PQ$ ?

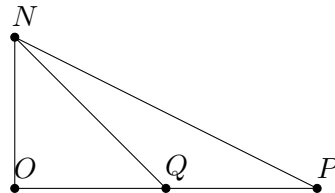
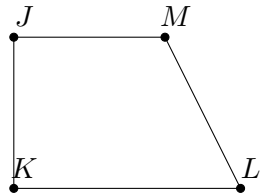
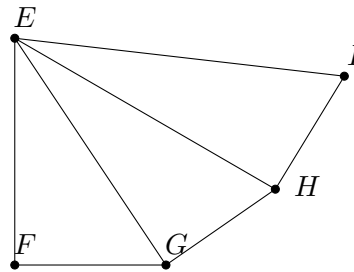
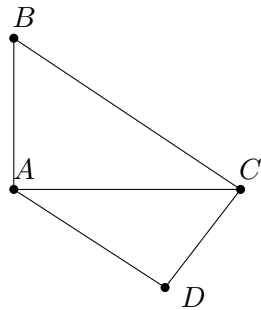
## Problemas Propostos

**Problema 5.** (OBM) Na figura abaixo  $ABCD$  é um quadrado de área  $64\text{cm}^2$  e  $EFGH$  um quadrado de área  $36\text{cm}^2$ . Determine a área do quadrado  $CMHN$ .

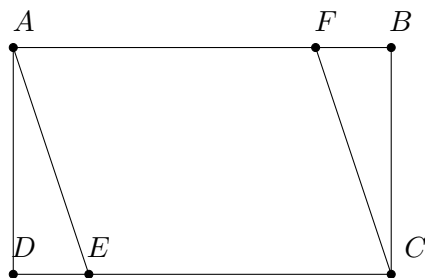


**Problema 6.** Neste problema temos quatro itens, cada um correspondente a um dos quatro desenhos da figura. Determine o valor dos segmentos pedidos.

- Ache  $BC$ , sabendo que  $AB = 6$ ,  $AD = 8$ ,  $CD = 4$ ,  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ .
- Ache  $EI$ , sabendo que  $EF = 6$ ,  $FG = 4$ ,  $GH = 2$ ,  $HI = 2\sqrt{5}$ ,  $\hat{F} = \hat{G} = \hat{H} = 90^\circ$ .
- Ache  $JK$ , sabendo que  $JM = 9$ ,  $ML = 10$ ,  $KL = 17$ ,  $\hat{J} = \hat{K} = 90^\circ$ .
- Ache  $OQ$ , sabendo que  $NQ = 2\sqrt{13}$ ,  $NP = 10$ ,  $Q$  é ponto médio e  $\hat{O} = 90^\circ$ .

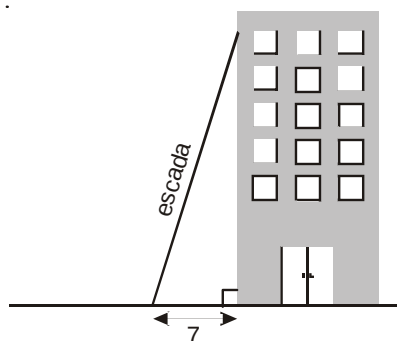


**Problema 7.** Nos lados  $AB$  e  $DC$  do retângulo  $ABCD$ , os pontos  $F$  e  $E$  são escolhidos de modo que  $AFCE$  seja um losango. Se  $AB = 16$  e  $BC = 12$ , ache  $EF$ .



**Problema 8.** (OBM 2004 - 1ª Fase) O perímetro de um retângulo é 100 e a diagonal mede  $x$ . Qual é a área desse retângulo em termos de  $x$ ?

**Problema 9.** (OBMEP 2005 - 1ª Fase) O topo de uma escada de 25 m de comprimento está encostado na parede vertical de um edifício. O pé da escada está a 7 m de distância da base do edifício, como na figura. Se o topo da escada escorregar 4 m para baixo ao longo da parede, qual será o deslocamento do pé da escada?



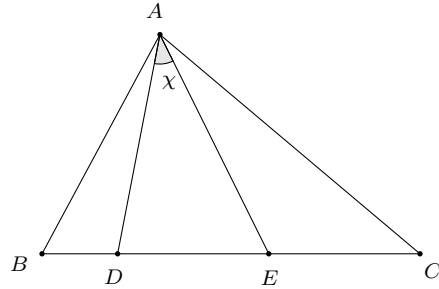
**Problema 10.** (OBM 2008 - 2ª Fase) Um viajante, que se encontrava perdido na floresta, andou 1 metro para o Leste, 2 metros para o Norte, 3 para o Oeste, 4 para o Sul, 5 para o Leste, 6 para o Norte,  $\dots$ , 2006 metros para o Norte, 2007 para o Oeste e 2008 para o Sul. Calcule, em metros, o valor inteiro mais próximo da distância entre as posições inicial e final do viajante.

**Problema 11.** (OBM 2011 - 1ª Fase) Seja  $XOY$  um triângulo retângulo com  $\angle XOY = 90^\circ$ . Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios de  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. Dado que  $XN = 19$  e  $YM = 22$ , determine a medida do segmento  $XY$ .

**Problema 12.** (Holanda 2008) No quadrilátero  $ABCD$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $CD = 5$  e  $DA = 6$ . Sabemos que  $\angle ABC = 90^\circ$ , qual é a área do quadrilátero  $ABCD$ ?

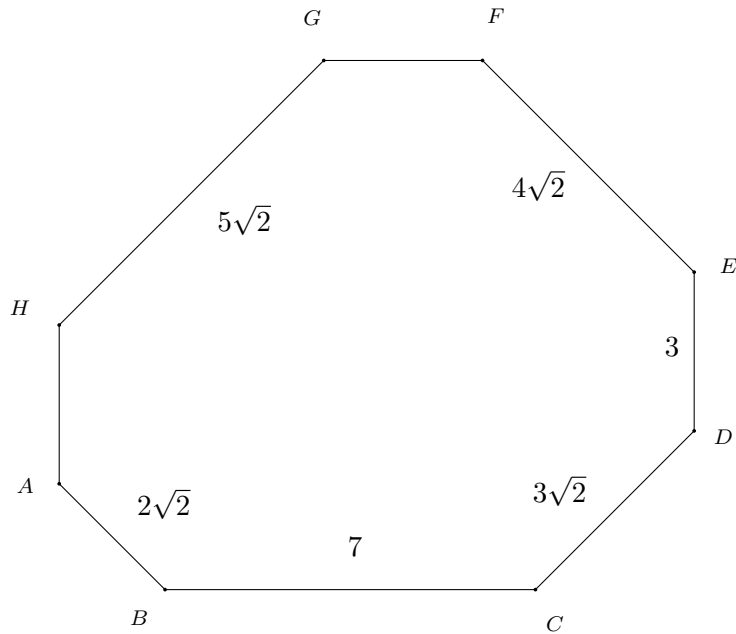
**Problema 13.** No triângulo  $ABC$  sabe-se que  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 20$  e  $AB = 101$ . Seja  $D$  o ponto médio de  $BC$ . Ache a área do triângulo  $ADB$ .

**Problema 14.** (OBM 2016 - 1ª Fase) Considere o triângulo  $ABC$  a seguir tal que  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  e  $BC = 5$ . Sobre o lado  $BC$ , são marcados os pontos  $D$  e  $E$  de modo que  $BD = 1$ ,  $DE = 2$  e  $EC = 2$ . Determine a medida do ângulo  $\angle DAE$ .



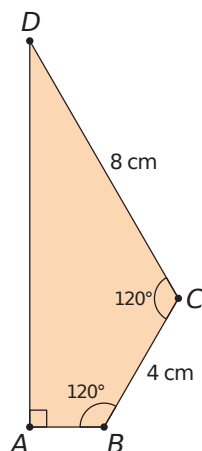
**Problema 15.** (OBM 2012 - 2ª Fase) Seja  $ABCD$  um retângulo tal que  $AD = 6$  e  $DC = 8$ . Construa um triângulo equilátero  $CED$  tal que  $E$ ,  $A$  e  $B$  estão no mesmo semiplano determinado pela reta  $CD$ . Determine a área do triângulo  $AEC$ .

**Problema 16.** (OBM 2015 - 2ª Fase) João cortou os quatro cantos de uma folha retangular e obteve o um octógono equiângulo  $ABCDEFGH$ , como mostra a figura abaixo.

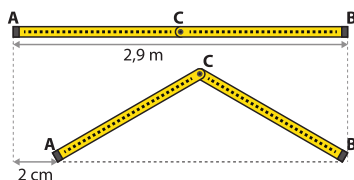


Sabendo que  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $BC = 7$ ,  $CD = 3\sqrt{2}$ ,  $DE = 3$ ,  $EF = 4\sqrt{2}$  e  $GH = 5\sqrt{2}$ , determine a área desse octógono.

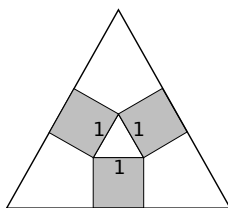
**Problema 17.** (OBMEP 2017 - 1ª Fase) Na figura, os ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle BCD$  medem  $120^\circ$ , o ângulo  $\angle BAD$  é reto e os segmentos  $BC$  e  $CD$  medem 4 cm e 8 cm, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero  $ABCD$  em  $cm^2$ ?



**Problema 18.** (OBMEP 2013 - 1ª Fase) Uma escada com 2,9 metros de comprimento e uma articulação central  $C$  possui a extremidade  $B$  fixa no chão e a extremidade  $A$  móvel, conforme a figura. A escada, inicialmente estendida no chão, foi dobrada de tal forma que a extremidade  $A$  deslizou 2 centímetros. A quantos centímetros do chão ficou a articulação  $C$ ?



**Problema 19.** (Holanda 2009) Na figura a seguir, temos três quadrados de lado 1 e dois triângulos equiláteros. Determine o lado do triângulo equilátero maior.



**Problema 20.** (Olimpíada de Maio 2006) Um retângulo de papel  $3\text{ cm} \times 9\text{ cm}$  é dobrado ao longo de uma reta, fazendo coincidir dois vértices opostos. Deste modo se forma um pentágono. Calcular sua área.

**Problema 21.** Seja  $ABCD$  um quadrado de lado 28. Seja  $P$  um ponto no seu interior e  $E$  um ponto no lado  $CD$  de modo que  $AP = BP = PE$  e que  $CD$  e  $PE$  sejam perpendiculares. Ache  $AP$ .

**Problema 22.** Seja  $P$  um ponto no interior do retângulo  $ABCD$ . Se  $PA = 2$ ,  $PB = 3$  e  $PC = 10$ , ache  $PD$ .

**Problema 23.** No interior do quadrado  $ABCD$  são escolhidos dois pontos  $E$  e  $F$  de modo que  $AE = FC = 7$ ,  $EF = 2$  e  $\angle AEF = \angle EFC = 90^\circ$ .

a) Mostre que  $AECF$  é um paralelogramo.

b) Determine a área do quadrado  $ABCD$ .

**Problema 24.** (China 1995) No triângulo  $ABC$ ,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB = AC$  e  $D$  é um ponto sobre  $BC$ . Prove que  $BD^2 + CD^2 = 2AD^2$ .

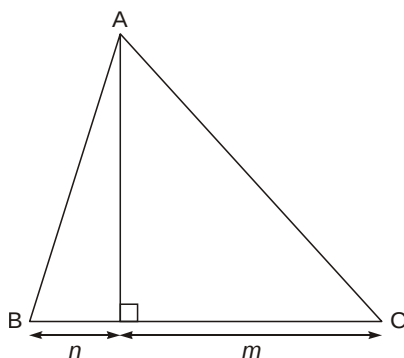
**Problema 25.** (Fórmula da Mediana) Em um triângulo  $ABC$ ,  $AM$  é a mediana relativa ao vértice  $A$ . Prove que

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2).$$

**Problema 26.** Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo e  $K$  um ponto no seu interior. Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  os pés das alturas de  $K$  até os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Mostre que

$$AQ^2 + BR^2 + CP^2 = AR^2 + BP^2 + CQ^2.$$

**Problema 27.** (OBMEP 2006 - 1ª Fase) No triângulo  $ABC$ , o comprimento dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , nessa ordem, são números inteiros e consecutivos. A altura relativa a  $BC$  divide este lado em dois segmentos de comprimentos  $m$  e  $n$ , como indicado. Quanto vale  $m - n$ ?



**Problema 28.** (OBM 2007 - 3ª Fase) Seja  $ABC$  um triângulo retângulo isósceles.  $K$  e  $M$  são pontos sobre hipotenusa  $AB$ , com  $K$  entre  $A$  e  $M$ , e o ângulo  $\angle KCM = 45^\circ$ . Prove que  $AK^2 + MB^2 = KM^2$ .

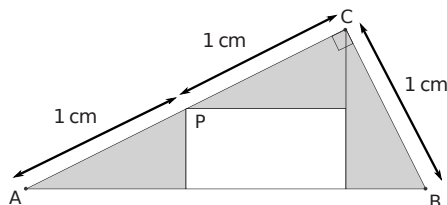


## Dicas e Soluções

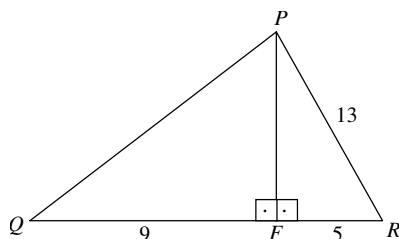
2. (OBM 2007 - 1ª Fase) A área do jardim é  $5a^2$ , onde  $a$  é o lado do quadrado. Pelo Teorema de Pitágoras,  $AB^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$ . Daí,  $5a^2 = 100$ , que é a área do jardim.

Observação: também é possível resolver o problema sem usar o Teorema de Pitágoras, formando o quadrado de lado  $AB$  e observando que sua área é equivalente à de 5 quadrados menores.

3. (OBMEP 2007 - 1ª Fase) Como os triângulos sombreados são congruentes, os segmentos  $AP$  e  $PC$  da figura medem ambos 1 cm. Logo os catetos do triângulo  $ABC$  medem 1 cm e 2 cm, e o teorema de Pitágoras nos diz que  $AB^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ . Segue que  $AB = \sqrt{5}$  cm, donde o perímetro do triângulo  $ABC$  é  $1 + 2 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$  cm.



4. (OBM 2004 - 1ª Fase) A figura do problema é a seguinte:



Pelo teorema de Pitágoras,  $PF^2 + 5^2 = 13^2$  e  $PQ^2 = 12^2 + 9^2 \Leftrightarrow PQ = 15$ .

5. Veja que  $BC = 8$  e  $HE = 6$ . Além disso, se  $\angle BCM = \alpha$ , então  $\angle CMB = 90 - \alpha$  e  $\angle HME = \alpha$ . Sendo  $CM = MH$ , veja que  $\triangle CBM \equiv \triangle MHE$  (caso LAA<sub>o</sub>). Portanto,  $BM = 6$ . Usando o teorema de Pitágoras no  $\triangle CBM$ , temos que

$$CM^2 = 64 + 36 = 100.$$

Conclui-se que  $[MHNC] = 100\text{cm}^2$ .

6. (a)  $\sqrt{116}$ .  
 (b)  $\sqrt{76}$ .  
 (c) 6. Trace uma paralela a  $JK$  passando por  $M$ .

(d) 4. Monte um sistema com duas variáveis.

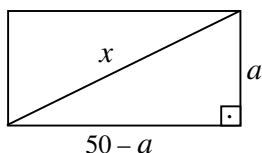
7. Seja  $FB = DE = x$ . Nesse caso,  $AF = 16 - x$ . Como  $AFC$  é um losango,  $FC = 16 - x$ . Aplicando o teorema de Pitágoras no  $\triangle FBC$ , temos:

$$(16 - x)^2 = x^2 + 12^2 \Rightarrow 256 - 32x + x^2 = x^2 + 144 \Rightarrow 32x = 112.$$

Logo,  $x = 3,5$ . Agora seja  $H$  o pé da altura desenhada de  $F$  até  $EC$ . Veja que  $HC = 3,5$  e  $EC = 12,5$ . Logo,  $EH = 12,5 - 3,5 = 9$ . Aplicando o teorema de Pitágoras no  $\triangle EHF$ , temos:

$$EF^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow EF = 15.$$

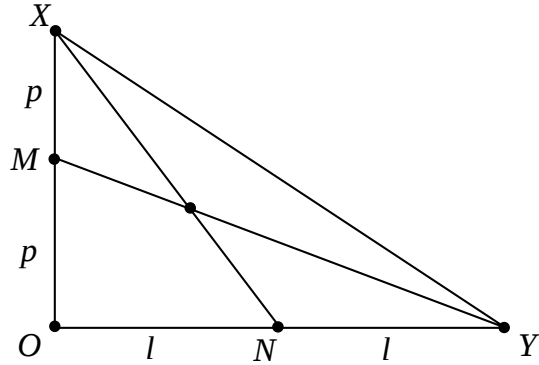
8. (OBM 2004 - 1ª Fase) Sejam  $a$  e  $50 - a$  os lados do retângulo. A área é  $(50 - a) \cdot a = 50a - a^2$ .



Pelo teorema de Pitágoras,  $x^2 = (50 - a)^2 + a^2 \Leftrightarrow x^2 = 2500 - 100a + 2a^2 \Leftrightarrow 50a = 1250 + a^2 - \frac{x^2}{2}$ . Deste modo, substituímos  $50a$  na área do retângulo e obtemos  $50a - a^2 = 1250 + a^2 - \frac{x^2}{2} - a^2 = 1250 - \frac{x^2}{2}$ .

9. (OBMEP 2005 - 1ª Fase) Considere o triângulo retângulo cuja hipotenusa é a escada que mede 25 m, um dos catetos é o segmento ligando o pé da escada à base do edifício, que mede 7 m, e o outro cateto é o segmento da parede do edifício que une o topo da escada ao solo. O comprimento  $x$  deste último cateto pode ser calculado imediatamente a partir do Teorema de Pitágoras: temos  $25^2 = 7^2 + x^2$  e obtemos  $x = 24$  m. Quando o topo da escada escorrega 4 m para baixo, obtemos um novo triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede 25 m e um dos catetos mede  $24 - 4 = 20$  m. O outro cateto  $y$  deste triângulo é determinado, outra vez, pelo Teorema de Pitágoras: temos  $25^2 = 20^2 + y^2$  e segue que  $y = 15$  m. Logo, o deslocamento do pé da escada será de  $15 - 7 = 8$  m.
10. (OBM 2008 - 2ª Fase) O deslocamento líquido do viajante na direção Leste-Oeste foi de  $(1 - 3) + (5 - 7) + \dots + (2005 - 2007) = (-2) + (-2) + \dots + (-2)$ , onde o termo  $(-2)$  aparece 502 vezes, portanto o deslocamento líquido é  $502 \cdot (-2) = -1004$ . Analogamente, o deslocamento líquido na direção Norte-Sul foi de  $-1004$ . Portanto, pelo teorema de Pitágoras a distância entre as posições inicial e final do viajante é  $d = \sqrt{1004^2 + 1004^2} = 1004\sqrt{2}$ . Observe agora que, como  $\sqrt{2} \approx 1,414$ , temos  $1004\sqrt{2} \approx 1419,656$ . Para ter certeza se estamos usando uma aproximação boa o suficiente, basta checar se  $1419,5 < 1004\sqrt{2} < 1420$ , quer dizer, se  $1419,5^2 < 1004 \cdot 2 < 1420^2$ . Mas é fácil efetuar os cálculos e verificar que essas desigualdades realmente se verificam. Logo, a melhor aproximação pedida é 1420 metros.

11. (OBM 2011 - 1ª Fase) Considere o seguinte desenho do problema.

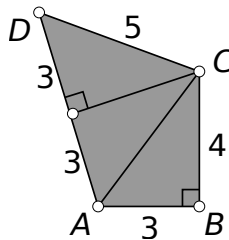


Pelo teorema de Pitágoras nos triângulos  $XON$  e  $MOY$  temos  $p^2 + 4l^2 = 22^2$  e  $l^2 + 4p^2 = 19^2$ . Somando essas duas equações obtemos  $5(p^2 + l^2) = 22^2 + 19^2 \Leftrightarrow p^2 + l^2 = \frac{22^2 + 19^2}{5}$ . Por outro lado temos que  $XY^2 = (2p)^2 + (2l)^2 = 4(p^2 + l^2)$ .

Substituindo a equação anterior nessa última expressão ficamos com  $XY^2 = \frac{4}{5}(22^2 + 19^2) = 26^2 \Leftrightarrow XY = 26$ .

12. Seja  $M$  o ponto médio de  $AD$ , logo  $DM = MA = 3$ . Como o triângulo  $ABC$  é retângulo, pelo teorema de Pitágoras,  $AC^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow AC = 5$ . Assim,  $\triangle DCA$  é isósceles. Logo,  $CM$  é perpendicular a  $AD$ . Agora veja que  $\triangle DMC \equiv \triangle CMA \equiv \triangle ABC$ , pelo caso cateto-hipotenusa. Assim,

$$[ABCD] = 3 \times [ABC] = 3 \times \frac{4 \times 3}{2} = 18.$$



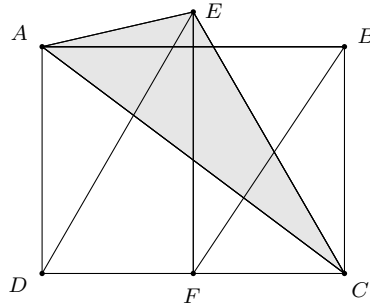
13. Seja  $BC = x$ . Pelo Teorema de Pitágoras,

$$101^2 = 20^2 + x^2 \Rightarrow (101 - 20)(101 + 20) = x^2$$

$$121 \cdot 81 = x^2 \Rightarrow x = 99.$$

Logo,  $[ABC] = \frac{20 \cdot 99}{2} = 990$  e  $[ADB] = 495$ .

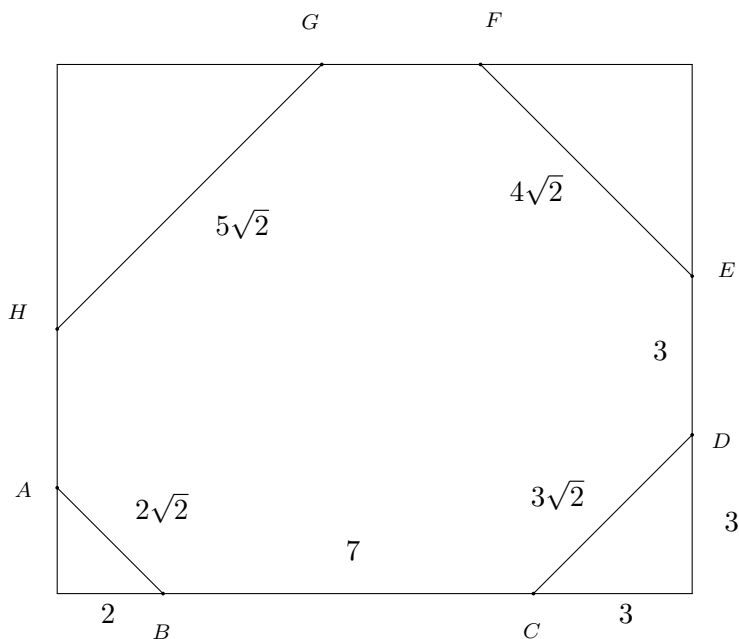
14. (OBM 2016 - 1ª Fase) Sejam  $p$  e  $q$  as medidas dos ângulos  $\angle BAD$  e  $\angle EAC$ , respectivamente. Como  $BA = BE$ , segue que  $\angle ABE = \angle BAE = p + x$ . Analogamente, como  $AC = DC$ , temos  $\angle DAC = \angle ADC = x + q$ . Pela recíproca do Teorema de Pitágoras, como é verdade que  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , segue que  $p + q + x = \angle BAC = 90^\circ$ . Finalmente, analisando a soma dos ângulos do triângulo  $DAE$ , temos  $180^\circ = (p + x) + x + (q + x) = 90^\circ + 2x$ , ou seja,  $x = 45^\circ$ .
15. (OBM 2012 - 2ª Fase)



Começamos traçando a altura de  $EF$  relativa ao lado  $DC$ . Como o triângulo é equilátero, a altura também será a mediana, ou seja,  $DF = FC = 4$ . Usando o teorema de Pitágoras temos  $EF^2 + CF^2 = EC^2 \Leftrightarrow EF^2 = 64 - 16 \Leftrightarrow EF = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ .

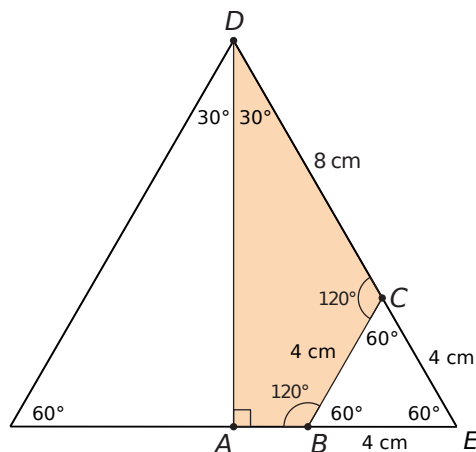
Agora para achar a área do  $AEC$ , temos  $[AEC] = [AECD] - [ACD] \Leftrightarrow [AEC] = [AEFD] + [ECF] - [ACD] \Leftrightarrow [AEC] = \frac{(6 + 4\sqrt{3}) \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} - \frac{6 \cdot 8}{2} \Leftrightarrow [AEC] = 16\sqrt{3} - 12$

16. (OBM 2015 - 2ª Fase) Os ângulos internos de um octógono equiângulo são iguais a  $\frac{(8-2) \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$ . Assim, prolongando  $AH$ ,  $BC$ ,  $DE$  e  $FG$ , obtemos um retângulo subtraído de quatro triângulos retângulos isósceles.



Pelo Teorema de Pitágoras, em um triângulo retângulo isósceles de lado  $l$  temos que sua hipotenusa  $x$  é tal que  $x^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$ , ou seja, a hipotenusa mede  $x = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$ . Portanto os lados dos triângulos retângulos isósceles cujas hipotensuas são  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  e  $GH$  medem 2, 3, 4 e 5, respectivamente. Assim, o retângulo possui lados  $2 + 7 + 3 = 12$  e  $3 + 3 + 4 = 10$ , e a área do octógono  $ABCDEFGH$  é  $10 \cdot 12 - \frac{2^2}{2} - \frac{3^2}{2} - \frac{4^2}{2} - \frac{5^2}{2} = 93$ .

17. (OBMEP 2017 - 1ª Fase) Prolongando-se dois lados do quadrilátero, obtemos um triângulo equilátero de lado 4 cm e um triângulo retângulo grande  $DAE$  que é metade de um triângulo equilátero de lado 12 cm, como indicado na figura.



Pelo Teorema de Pitágoras, a altura de um triângulo equilátero de lado  $l$  é  $h = \frac{\sqrt{3}l}{2}$ .

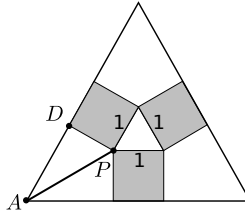
$$\text{Logo, } [ABCD] = [DAE] - [CBE] = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} - \frac{16\sqrt{3}}{4} = 14\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

18. (OBMEP 2013 - 1ª Fase) Suponhamos que a escada tenha comprimento  $AB = x$ . Na figura, os pontos  $A_1$  e  $D$  indicam, respectivamente, as posições dos pontos  $A$  e  $C$  após o movimento. Como  $C$  é o ponto médio de  $AB$ , o triângulo  $A_1BD$  é isósceles com  $A_1B = x - 2$  e  $A_1D = BD = \frac{x}{2}$ . A distância  $h = DE$  do ponto  $D$  ao chão pode então

ser calculada pelo teorema de Pitágoras como  $h^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{x-1}$ .

No problema, temos  $x = 290$  cm e então  $h = \sqrt{289} = 17$  cm.

19. Marque os pontos  $A$ ,  $P$  e  $D$  na figura. Note que o triângulo  $APD$  é metade de um triângulo equilátero, pois tem ângulos  $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ . Daí, se  $PD = 1$ , então  $AP = 2$ . Pelo teorema de Pitágoras,  $AD = \sqrt{3}$ . Portanto, o lado do triângulo maior será  $2\sqrt{3} + 1$ .



20. Seja  $ABCD$  o retângulo e  $ABEFD'$  o pentágono formado ao dobrar o papel como é mostrado na figura (2). Por construção, sabemos que  $AD' = 3$  e que o triângulo  $AD'E$  é retângulo em  $D'$ . Sendo  $D'E = x$ , devemos ter  $AE = 9 - x$ . Agora, usando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $AD'E$ , obtemos que:

$$(9 - x)^2 = x^2 + 3^2$$

$$81 - 18x + x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow x = 4.$$

Pontando, a área de  $AD'E$  é igual a 6. Além disso,  $AEFB$  e  $EDCF$  são congruentes, pois  $EF$  é mediatriz da diagonal  $AC$ . Com isso, a área do quadrilátero  $AEFB$  é metade da área do retângulo  $ABCD$  e, portanto, igual a 13,5. E como  $ABF$  e  $AD'E$  são congruentes, a área do pentágono será igual a  $13,5 + 6 = 19,5$ .

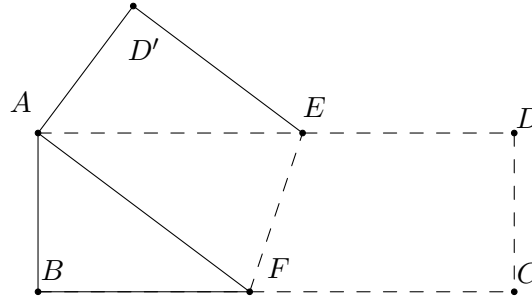
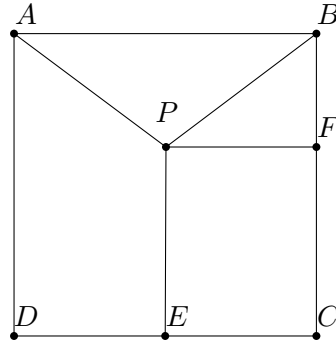


Figura 2: Olimpíada de Maio 2006.

21. Seja  $F$  o pé da altura de  $P$  até o lado  $BC$ . Seja  $PE = PB = x$ . Como  $CF = x$ , temos que  $BF = 28 - x$ . Além disso,  $PF = EC = 14$ . Aplicando o teorema de Pitágoras no  $\triangle PFB$ , temos:

$$x^2 = (28 - x)^2 + 14^2 \Rightarrow x^2 = x^2 - 56x + 28^2 + 14^2 \Rightarrow 56x = 980 \Rightarrow x = 17,5.$$



22. Sejam  $E, F, G, H$  pontos sobre os lados do retângulo de modo que  $EF$  e  $HG$  sejam dois segmentos paralelos aos lados  $AB$  e  $BC$  e que passam pelo ponto  $P$ . Sejam  $AE = BF = x$  e  $ED = FC = y$ . Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos  $APE$  e  $EPD$  temos  $AP^2 = PE^2 + x^2$  e  $PD^2 = PE^2 + y^2$ . Subtraindo essas duas equações, temos que

$$AP^2 - PD^2 = x^2 - y^2.$$

De modo análogo,

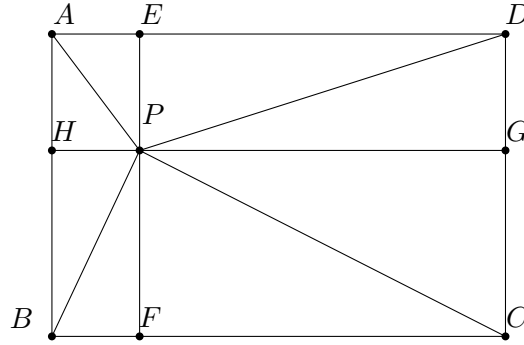
$$BP^2 - PC^2 = x^2 - y^2.$$

Igualando essas duas equações, temos:

$$AP^2 - PD^2 = BP^2 - PC^2$$

Substituindo os valores informados pelo enunciado, concluímos que

$$PD^2 = 2^2 - 3^2 + 10^2 \Rightarrow PD = \sqrt{95}.$$



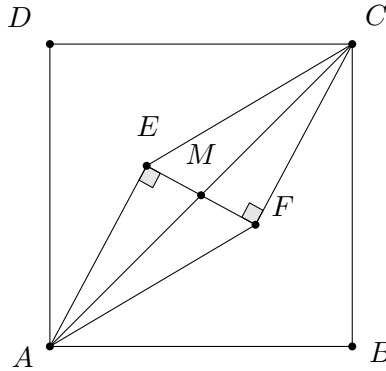
23. Veja  $AECF$  tem dois lados paralelos e iguais ( $AE$  e  $CF$ ). Portanto, é um paralelogramo. Logo, suas diagonais  $AC$  e  $EF$  cortam-se mutuamente ao meio. Seja  $M$  o ponto de encontro dessas diagonais. Veja que  $MF = 1$ . Pelo teorema de Pitágoras aplicado no  $\triangle MFC$ , temos que

$$CM^2 = 7^2 + 1^2 = 50 \Rightarrow CM = \sqrt{50}.$$

Como  $AC = 2 \cdot CM$ , então  $AC = 2\sqrt{50}$ . Agora seja  $\ell$  a medida do lado do quadrado  $ABCD$ . Usando Pitágoras no  $\triangle ABC$ , temos que

$$AC^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow 200 = 2\ell^2 \Rightarrow \ell^2 = 100.$$

Porém, sabemos que  $[ABCD] = \ell^2 = 100$ .



24. Suponha sem perda de generalidade que  $D$  está mais próximo de  $C$  do que de  $B$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $BC$ . Como o triângulo  $ABC$  é isósceles,  $AM$  também é altura. Sendo  $\angle CBA = \angle ACB = 45^\circ$ , o triângulo  $AMB$  é isósceles. De modo análogo,  $ACM$  também é isósceles. Portanto,  $AM = MB = MC$ . Seja  $x = AB = AC$ . Usando o teorema de Pitágoras no triângulo  $ABC$ , temos que  $CB^2 = x^2 + x^2$ . Logo,  $CB = x\sqrt{2}$ . Sendo  $M$  o ponto médio,  $MB = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ . Consequentemente,  $MA = MC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ . Agora seja  $y = DM$ , temos que:

$$CD = CM - DM = \frac{x\sqrt{2}}{2} - y \Rightarrow CD^2 = \left( \frac{x\sqrt{2}}{2} - y \right)^2,$$



$$BD = BM + DM = \frac{x\sqrt{2}}{2} + y \Rightarrow BD^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2} + y\right)^2.$$

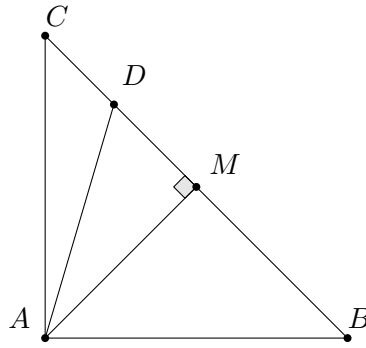
Somando essas duas equações obtemos:

$$CD^2 + BD^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{x^2}{2} - xy\sqrt{2} + y^2\right) + \left(\frac{x^2}{2} + xy\sqrt{2} + y^2\right) = x^2 + 2y^2$$

Por outro lado, usando o teorema de Pitágoras no triângulo  $ADM$ , temos:

$$AD^2 = DM^2 + AM^2 = y^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = y^2 + \frac{x^2}{2}.$$

Multiplicando a última equação por 2 e comparando com o valor encontrado para  $CD^2 + BD^2$ , chegamos à identidade do problema.



25. Seja  $D$  o pé da altura relativa ao vértice  $A$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $D$  está mais próximo de  $B$  do que de  $C$ . Usando o teorema de Pitágoras nos triângulos  $ABD$  e  $ADC$ , temos:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2,$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

Somando essas duas, temos que

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + DC^2. \quad (1)$$

Por outro lado,  $BD = MB - DM$  e  $DC = MC + MD$ . Assim,

$$\begin{aligned} BD^2 + DC^2 &= (MB - DM)^2 + (MC + MD)^2 = \\ &= (MB^2 - 2MB \cdot DM + DM^2) + (MC^2 + 2MC \cdot DM + DM^2) \end{aligned}$$

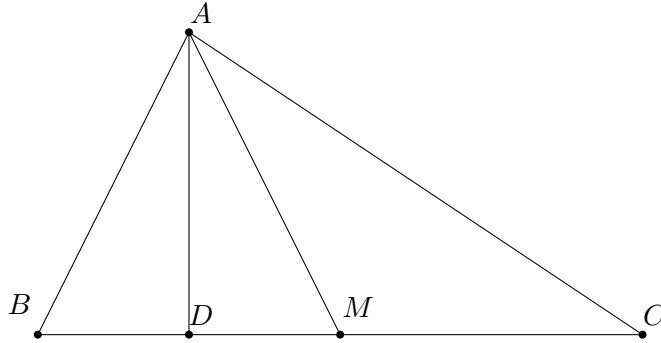
Como  $M$  é ponto médio de  $BC$ ,  $MB = MC = \frac{BC}{2}$ . Portanto,

$$BD^2 + DC^2 = 2BM^2 + 2DM^2.$$

Substituindo em 1, temos que

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BM^2 + 2DM^2.$$

Por outro lado, no triângulo  $ADM$ , temos que  $AM^2 = AD^2 + DM^2$ . Substituindo essa relação na equação anterior, chegamos à identidade que estávamos buscando.



26. Vamos dividir a demonstração em dois passos. No primeiro passo, vamos utilizar o teorema de Pitágoras no triângulos  $KPC$ ,  $KAQ$  e  $KRB$ :

$$KC^2 = KP^2 + PC^2,$$

$$KA^2 = KQ^2 + AQ^2,$$

$$KB^2 = KR^2 + BR^2.$$

Somando essas três equações obtermos

$$\boxed{KA^2 + KB^2 + KC^2 = (KP^2 + KQ^2 + KR^2) + (AQ^2 + BR^2 + PC^2).}$$

No segundo passo, vamos utilizar o teorema de Pitágoras no triângulos  $KQC$ ,  $KRA$  e  $KBP$ :

$$KC^2 = KQ^2 + QC^2,$$

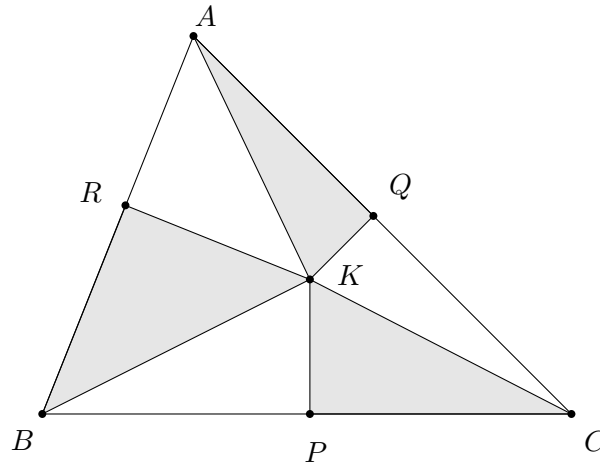
$$KA^2 = KR^2 + AR^2,$$

$$KB^2 = KP^2 + BP^2.$$

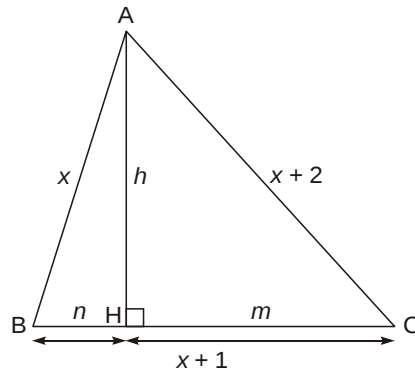
Somando essas três equações obtermos

$$\boxed{KA^2 + KB^2 + KC^2 = (KP^2 + KQ^2 + KR^2) + (AR^2 + BP^2 + QC^2).}$$

Comparando as duas equações que destacamos, chegamos à identidade do problema.

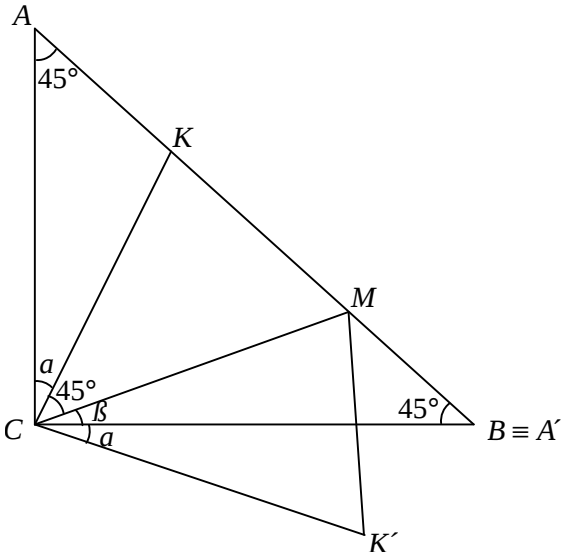


27. (OBMEP 2006 - 1ª Fase) Colocando  $AB = x$  temos  $BC = x + 1$  e  $AC = x + 2$ . Seja  $AH = h$  a altura relativa a  $BC$ .



Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos  $ABH$  e  $AHC$  obtemos  $n^2 + h^2 = x^2$  e  $(x + 2)^2 = m^2 + h^2$ . Segue que  $h^2 = x^2 - n^2$  e  $h^2 = (x + 2)^2 - m^2$ , donde  $(x + 2)^2 - m^2 = x^2 - n^2$ , ou seja,  $(x + 2)^2 - x^2 = m^2 - n^2$ . Usando a identidade  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  obtemos então  $(x + 2 + x)(x + 2 - x) = (m + n)(m - n)$ . Como  $m + n = x + 1$  segue que  $2(2x + 2) = (m - n)(m + n)$ , segue que, donde  $4(x + 1) = (m - n)(x + 1)$ . Como  $x + 1 \neq 0$  podemos dividir ambos os membros desta última expressão por  $x + 1$  e obtemos finalmente  $m - n = 4$ .

28. (OBM 2007 - 3ª Fase)



Girando o  $\triangle AKC$  em torno de  $C$ , até  $A' \equiv B$ , temos o  $\triangle CK'A'$  (ou  $\triangle CK'B$ ) em que  $\angle CA'K' = \angle CAK = 45^\circ$ , então  $\triangle MBK'$  é reto. Sendo  $\angle ACK = a$  e  $\angle MCB = b$ ,  $\angle BCK' = \angle ACK = a$ . Como  $\triangle ABC$  é retângulo, e a hipotenusa é  $AB$ ,  $\triangle ACB$  é reto. Então  $a + b + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow a + b = 45^\circ$ . Como  $KC = KC'$ ;  $\angle MCK' = a + b = 45^\circ = \angle KCM$  e como  $\triangle MCK$  e  $\triangle MCK'$  são congruentes (caso LAL), então todos os seus lados e ângulos são iguais. Assim,  $KM = K'M$ .  $\triangle ACK$  é congruente com  $\triangle A'CK'$ , por construção. Então  $AK = A'K' = BK'$ .  $\triangle MKB'$  (ou  $\triangle MK'A'$ ) é retângulo. Então, pelo teorema de Pitágoras, temos:  $MB^2 + BK'^2 = MK'^2$  e como  $BK' = A'K' = AK$  e  $MK' = KM$ , temos finalmente que  $AK^2 + MB^2 = KM^2$ .