# Problemas Resolvidos

*Nível* 2

## Algumas propriedades de triângulos

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

# Problemas

**Problema 1.** Sejam $ABC$ um triângulo e $M$ o ponto médio de $BC$. Se $AM = BM = CM$, prove que $\angle BAC = 90°$.

**Problema 2.** (Torneio das cidades) Sejam $ABCD$ um paralelogramo, $M$ o ponto médio de $CD$ e $H$ o pé da perpendicular baixada de $B$ a $AM$. Prove que $BCH$ é um triângulo isósceles.

**Problema 3.** Em um triângulo $ABC$, retângulo em $A$ é isósceles, sejam $D$ um ponto no lado $AC$ ($A \neq C \neq D$) e $E$ o ponto no prolongamento de $BA$ tal que o triângulo $ADE$ é isósceles. Se $P$ é o ponto médio de $BD$, $R$ o ponto médio de $CE$ e $Q$ a interseção entre $ED$ e $BC$, prove que o quadrilátero $ARPQ$ é um quadrado.

**Problema 4.** Seja $ABC$ um triângulo acutângulo tal que $\angle B = 2\angle C$, $AD$ é perpendicular a $BC$, com $D$ sobre $BC$, e $E$ o ponto médio de $BC$. Prove que $AB = 2DE$.

**Problema 5.** (China) Seja $ABCD$ um trapézio, $AD \parallel BC$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 60°$, $E$, $M$, $F$, $N$ os pontos médios de $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, respectivamente. Se $BC = 7$, $MN = 3$, determine a medida de $EF$.

**Problema 6.** (China) Seja $ABCD$ um trapézio, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = \angle ADC = 90°$, e o triângulo $ABC$ é equilátero. Se a base média do trapézio $EF = \frac{3}{4}a$, determine o comprimento das duas bases do trapézio, em função de $a$.

**Problema 7.** (Moscou) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e $O$ um ponto em seu interior tal que $\angle AOB = \angle COD = 120°$, $AO = OB$, $CO = OD$. Sejam $K$, $L$, $M$ os pontos médios de $AB$, $BC$, $CD$, respectivamente. Prove que $\triangle KLM$ é equilátero.

**Problema 8.** (OBM) No triângulo $ABC$, $D$ é o ponto médio de $AB$ e $E$ ponto sobre o lado $BC$ tal que $BE = 2 \cdot CE$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, calculo o valor de $\angle BAC$.

**Problema 9.** Em um triângulo isósceles $ABC$, com $AB = BC$, sejam $K$, $L$ pontos sobre $AB$, $BC$, respectivamente, tais que $AK + LC = KL$. A reta paralela a $BC$ passando pelo ponto médio $M$ de $KL$ intersecta $AC$ em $N$. Ache a medida de $\angle KNL$.

# Soluções

**1.** Note que os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle ACM$ são isósceles com bases $AB$ e $AC$, respectivamente. Logo teremos que $\angle ABM = \angle BAM$ e $\angle ACM = \angle CAM$. A soma dos ângulos interiores do $\triangle ABC$ será $180° = \angle ABM + \angle BAM + \angle ACM + \angle CAM = 2(\angle BAM + \angle CAM) = 2\angle BAC$. Concluímos que $\angle BAC = 90°$.

**2.** Seja $E$ o ponto de encontro das retas $AM$ e $BC$. Como $CM \parallel AB$ e $CM = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$, temos que $CM$ é base média do $\triangle ABE$. Consequentemente teremos $BC = CE$. Note então que $HC$ é mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo $\triangle BHE$, logo $BC = HC = EC$. Isso mostra que o $\triangle BCH$ é isósceles.

**3.** Pelo critério *l.a.l.* podemos ver que $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ ($AE = AD$, $AC = AB$ e $\angle CAE = \angle BAD = 90°$). Veja então que $AP$ e $AR$ são medianas relativas à hipotenusa dos triângulos retângulos equivalentes $ABD$ e $ACE$. Chamando de $x$ o comprimento de $AR$ e usando que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da hipotenusa, podemos concluir que $x = AR = ER = CR = AP = BP = DP$.

Note também que $QR$ e $QP$ são as medianas relativas à hipotenusa dos triângulos retângulos $\triangle EQC$ e $\triangle BQD$, respectivamente. Logo $QR = CR = ER = x$ e $QP = BP = DP = x$.

Acabamos de mostrar que o quadrilátero $ARPQ$ têm todos os lados iguais a $x$, ou seja, é um losango. Mostraremos então que um dos seus ângulo internos, por exemplo $\angle PAR$, é reto. Para ver isso, note que $\triangle AER \equiv \triangle ADP$ (critério *l.l.l.*), então, em particular temos $\angle EAR = \angle PAD$. Finalmente teremos $\angle PAR = \angle DAR + \angle PAD = \angle DAR + \angle EAR = \angle DAE = 90°$.

**4.** Chamemos $\angle C$ de $\alpha$, logo teremos que $\angle B = 2\alpha$. Seja $F$ o ponto médio de $AB$, então $EF$ é base média do $\triangle ABC$ relativa ao lado $AC$, logo $\angle BEF = \angle BCA = \alpha$.

Como $DF$ é mediana relativa à hipotenusa do $\triangle ABD$ retângulo, temos que $AF = BF = DF$. Basta mostrar então que $DF = DE$.

Como $\triangle FBD$ é isósceles (com $BF = FD$), temos que $\angle FDB = \angle FBD = 2\alpha$. Como $\angle FDB$ é externo ao $\triangle FDE$, temos $\angle FDE = \angle DEF + \angle DFE$, ou seja, $2\alpha = \alpha + \angle DFE$, donde concluímos que $\angle DFE = \alpha$. Logo $\triangle DFE$ é isósceles com $DE = DF$ como queríamos mostrar.

**5.** Seja $P$ o ponto de interseção de $BA$ e $CD$. Olhando para a soma dos ângulos internos do $\triangle BPC$, temos que $\angle BPC = 90°$.

Como $AD \parallel BC$, a mediana $PM$ do $\triangle BPC$ corta o segmento $AD$ também no seu ponto médio, logo a interseção de $PM$ com $AD$ acontece justamente no ponto $N$.

Usando $\triangle BPC$ é retângulo e que $PM$ é mediana relativa à hipotenusa, temos que $PM = \frac{BC}{2} = 3,5$. Logo $PN = PM - MN = 3,5 - 3 = 0,5$. Como $PN$ também é mediana relativa à hipotenusa do $\triangle APD$ retângulo, temos $AD = 2PN = 2 \times 0,5 = 1$.

Por último, a como $EF$ é a base média do trapézio $ABCD$, temos que $EF = \frac{BC+AD}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$.

**6.** Antes de resolver o problema, mostraremos o seguinte resultado: Num triângulo retângulo $ABC$ com $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$ e $\angle C = 30°$. O cateto oposto ao ângulo de $30°$ é igual à metade da hipotenusa, ou seja, $AB = \frac{BC}{2}$. Para ver isso, considere o ponto médio $M$ de $BC$. Logo teremos $AM = BM = CM$. Como $\angle B = 60°$, o triângulo $ABM$, que já tínhamos que era isósceles, na verdade será equilátero. Logo $AB = BM = \frac{BC}{2}$, como queríamos mostrar.

Vamos resolver agora o exercício. Chamaremos de $x$ o comprimento dos lados do $\triangle ABC$ equilátero, ou seja $x = AB = BC = CA$. Por serem ângulos alternos internos, temos que $\angle ACD = \angle BAC = 60°$. Logo $\triangle ACD$ é um triângulo retângulo onde os ângulos agudos medem $60°$ e $30°$. Pelo resultado citado no início, temos que $CD = \frac{AC}{2} = \frac{x}{2}$.

Temos então que a maior base do trapézio mede $x$ e a menor mede $\frac{x}{2}$. Logo a base média será $\frac{3}{4}a = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{2}\right) = \frac{3}{4}x$, donde concluímos que $a = x$.

Mostramos então que $AB = a$ (base maior) e $CD = \frac{a}{2}$ (base menor).

**7.** Veja que $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$ (critério *l.a.l.*, pois $AO = OB$, $\angle AOC = \angle BOD = 120° + \angle BOC$ e $CO = OD$). Consequentemente teremos $AC = BD$. Como $KL$ e $LM$ são bases médias dos triângulos $ABC$ e $BCD$, respectivamente, temos que $KL = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2} = LM$. Para concluir, basta mostrar que $\angle KLM = 60°$.

Chamemos de $P$ o ponto de interseção das diagonais $AC$ e $BD$. Note que, como $KL \parallel AC$ e $LM \parallel BD$ temos que $\angle KLM = \angle APD$. Logo será suficiente mostrar que $\angle APD = 60°$, ou equivalentemente, $\angle CPD = 120°$. Usando que $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$, temos que, em particular, $\angle ACO = \angle BDO$, logo, olhando para a soma dos ângulos internos dos triângulos $\triangle OCD$ e $\triangle PCD$, teremos que $\angle CPD = 120°$, como queríamos mostrar.

**8.** Começaremos mostrando uma propriedade clássica de triângulos:

**Lema 1.** As medianas de um triângulo se intersectam em um ponto, chamado baricentro, que divide cada mediana em dois segmentos cujos comprimentos estão na razão de 2 para 1.

*Demonstração.* Considere um $\triangle ABC$. Sejam $K$, $L$, $M$ os pontos médios dos lados $BC$, $AC$, $AB$. Seja $G$ o ponto de interseção de $AK$ e $BL$. Mostraremos que $\frac{AG}{GK} = \frac{BG}{GL} = 2$. Para ver isso, note que $KL$ é base média do $\triangle ABC$, logo $KL \parallel AB$ e $KL = \frac{AB}{2}$. Os triângulos $\triangle ABG$ e $\triangle KLG$ são semelhantes (veja que $\angle BAG = \angle GKL$ e $\angle ABG = \angle GLK$ por serem alternos internos), logo os seus lados se encontram na mesma proporção, ou seja, $\frac{AG}{GK} = \frac{BG}{GL} = \frac{AB}{KL} = 2$.

Analogamente, se chamarmos de $G'$ o ponto de interseção das medianas $AK$ e $CM$, teremos que $\frac{AG'}{G'K} = 2$. Ou seja, $G$ e $G'$ dividem o segmento $AK$ na mesma proporção. Isso implica que $G = G'$, o que conclui a prova. □

Vamos agora resolver o exercício. Seja $F$ o ponto no prolongamento de $AC$ tal que $C$ é o ponto médio de $AF$. Veja então que $BC$ é mediana do $\triangle ABF$ relativa ao lado $AF$, e, como $E$ é o ponto na mediana que divide ela na proporção $2:1$, temos que $E$ é o baricentro do $\triangle ABF$. Chamando de $G$ o ponto de interseção de $AE$ com $BF$, temos então que $G$ é ponto médio de $BF$.

Veja que $CG$ e $GD$ são bases médias do $\triangle ABF$, logo $ADGC$ é um paralelogramo. Chamemos de $H$ o ponto de interseção das diagonais $AG$ e $CD$ do paralelogramo $ADGC$, logo $H$ é ponto médio de $AG$ e $CD$. Como $\angle ADC = \angle BAE$, temos que $AH = HD$, o que mostra que as diagonais do paralelogramo $ADGC$ são iguais. Isso implica que $ADGC$ é um retângulo e, portanto, $\angle BAC = 90°$.

**9.** Seja $P$ o ponto de interseção de $AC$ com a reta que passa por $K$ e é paralela a $BC$. Como $\angle APK = \angle ACB$ (ângulos correspondentes), temos que $\triangle AKP$ é isósceles com $AK = KP$. Temos que $MN$ é a base média do trapézio $KPCL$, logo $MN = \frac{KP+LC}{2} = \frac{AK+LC}{2} = \frac{KL}{2}$. Logo, no $\triangle KNL$ a mediana $MN$ relativa ao lado $KL$ é igual à metade de $KL$, o que implica que $\angle KNL = 90°$.

---

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández